Anwendungen

Benjamin Rudig

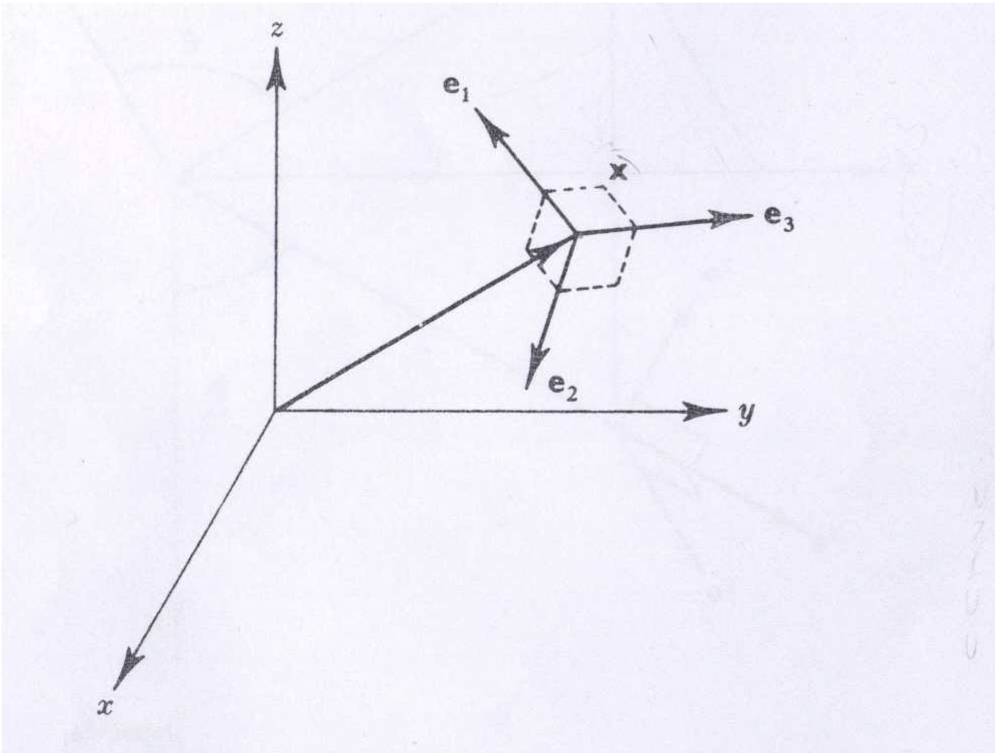
09.12.08

Seminar
„Differentialformen in Natur und Technik “

WS 08/09

Inhaltsverzeichnis

1 Bewegliche Koordinatensysteme in E^3



$d\mathbf{x}$ ist ein Vektor mit Einsformen

$$d\mathbf{x} = (dx,\ dy,\ dz) = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$d\mathbf{x}$ soll über das Koordinatensystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ im Punkt $\mathbf{x}$ ausgedrückt werden.

$$d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3$$

Das Gleiche soll nun mit allen $\mathbf{e}_i$ gemacht werden

$$d\mathbf{e}_i = \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \omega_{i3}\mathbf{e}_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Aus $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ folgt

$$d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_k = 0$$

was speziell

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$$

ergibt

Zur Vereinfachung sollen nun folgende Notationen gelten:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \omega_{ij}$$

Daraus erhalten wir dann folgende Strukturgleichungen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \sigma\mathbf{e} \\ d\mathbf{e} &= \Omega\mathbf{e} \\ \Omega + \Omega^t &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass Ω schiefsymmetrisch

Nach zweimaligem Anwenden von d erhalten wir aus $d(d\mathbf{x}) = 0$ folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} d\sigma\mathbf{e} - \sigma\, d\mathbf{e} &= 0 \\ d\sigma\mathbf{e} - \sigma\Omega\mathbf{e} &= 0 \\ (d\sigma - \sigma\Omega)\mathbf{e} &= 0 \end{aligned}$$

Da alle $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind folgt die Gleichung

$$d\sigma = \sigma\Omega$$

Analog erhält man aus $d(d\mathbf{e}) = 0$

$$0 = d\Omega\mathbf{e} - \Omega\, d\mathbf{e} = (d\Omega - \Omega^2)\mathbf{e}$$

$$d\Omega = \Omega^2$$

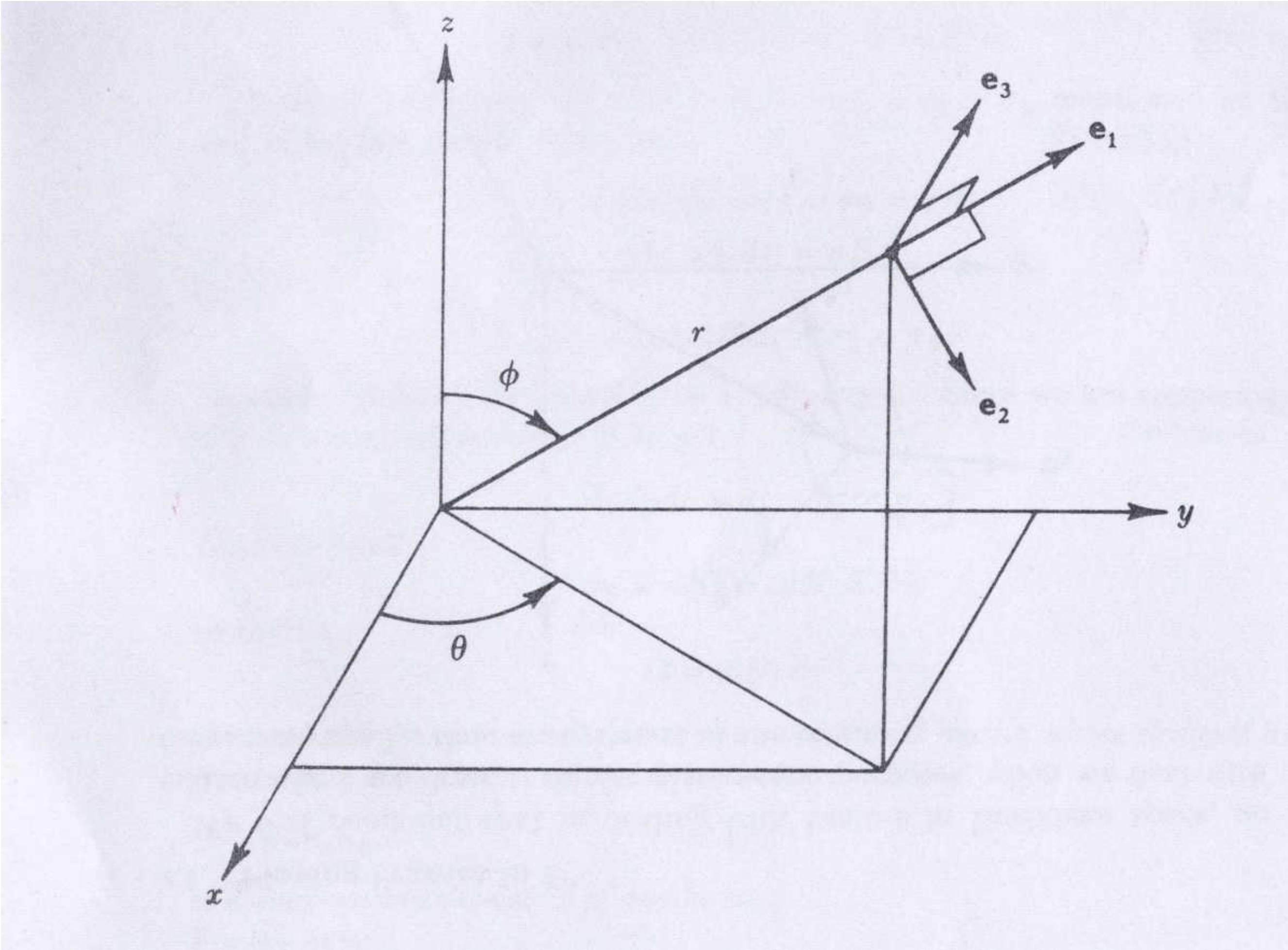
Zusammengefasst haben wir nun folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= \sigma \mathbf{e} & \qquad d\sigma &= \sigma\Omega \\
d\mathbf{e} &= \Omega \mathbf{e} & \qquad d\Omega &= \Omega^2 \\
\Omega + \Omega^t &= 0 & &
\end{aligned}
$$

weitere Differenzierung bringt keine neuen Erkentnisse

Die Dreiform $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$ ist gerade das Volumenelement im E^3

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = dx\,dy\,dz$$


z
e3
e1
r
ϕ
e2
y
θ
x

Beispiel: Kugelkoordinaten

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ werden so gewählt, dass sie in die Richtungen von r, ϕ, θ zeigen

$$\mathbf{x} = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$

Mit d auf $\mathbf{x}$ angewendet erhält man

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi))\,dr \\
&\quad + (r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), -r\sin(\phi))\,d\phi \\
&\quad + (-r\sin(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)\cos(\theta), 0)\,d\theta \\
&= (dr)\mathbf{e}_1 + (r\,d\phi)\mathbf{e}_2 + (r\sin(\phi)\,d\theta)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)) \\
\mathbf{e}_2 &= (\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), -\sin(\phi)) \\
\mathbf{e}_3 &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)
\end{aligned}$$

Damit kann man σ_i folgendermaßen bestimmen

$$\sigma_1 = dr, \qquad \sigma_2 = r\,d\phi, \qquad \sigma_3 = r\sin(\phi)\,d\theta$$

Die Differenzierung der $\mathbf{e}_i$ ergibt

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= (d\phi)\mathbf{e}_2 + (\sin(\phi)\,d\theta)\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 &= (-d\phi)\mathbf{e}_1 + (\cos(\phi)\,d\theta)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Da Ω schiefsymmetrisch ist ensteht folgende Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\phi & \sin(\phi)\,d\theta \\ -d\phi & 0 & \cos(\phi)\,d\theta \\ -\sin(\phi)\,d\theta & -\cos(\phi)\,d\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Das Volumenelement ist

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = r^2\sin(\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta$$

2 Zusammenhang zwischen orthogonalen und schiefsymmetrischen Matrizen

Es ist kein Zufall, dass Ω eine schiefsymmetrische Matrix ist, denn eine Approximation 1.Ordnung an eine orthogonale Matrix ist eine schiefsymmetrische Matrix.

B ist eine orthogonale Matrix wenn $B^t = B^{-1}$ oder $BB^t = B^tB = I$

A ist eine schiefsymmetrische Matrix genau dann wenn $A + A^t = 0$

Für A schiefsymmetrisch und ϵ klein setzen wir $B = I + \epsilon A$ und erhalten

$$BB^t = (I + \epsilon A)(I - \epsilon A) = I + O(\epsilon^2)$$

In einem anderen Ansatz ist A schiefsymmetrisch und man setzt $B = \frac{I+A}{I-A}$ daraus erhält man dann

$$B^tB = \left(\frac{I + A}{I - A}\right)\left(\frac{I - A}{I + A}\right) = I$$

sodass B orthogonal ist

Nun können einige Rechnungen aus dem vorherigen Kapitel nachgeprüft werden
Es sei

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix}$$

wobei die $\mathbf{i}_j$ die Einheitsvektoren in x, y, z Richtung sind. Dann ist

$$\mathbf{e}_i = \sum b_{ij}\mathbf{i}_j, \qquad \mathbf{e} = B\mathbf{i}$$

wobei B eine Orthogonalmatrix ist, denn

$$I = \mathbf{e}\mathbf{e}^t = B\mathbf{i}\mathbf{i}^t B^t = BIB^t = BB^t$$

Nun kann die Gleichung $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = dx\,dy\,dz$ des letzten Kapitels gezeigt werden.
wir haben

$$d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)\mathbf{i} = \sigma\mathbf{e} = \sigma B\mathbf{i}$$
$$(dx, dy, dz) = \sigma B$$

daher ist

$$dxdydz = |B|\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$$

Da $B^t B = I$ erhalten wir $|B|^2 = 1$, $|B| = \pm 1$ und wenn wir annehmen dass $\mathbf{e}$ ein rechtshändiges System ist, so ist $|B| = +1$
und

$$dxdydz = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$$

Außerdem haben wir noch

$$d\mathbf{e} = dB\mathbf{i} = (dB)B^{-1}\mathbf{e}$$

woraus

$$\Omega = (dB)B^{-1}$$

folgt

Generell folgt daraus, dass $(dA)A^{-1}$ eine schiefsymmetrische Matrix aus Einsformen ist, wenn A eine orthogonale Matrix ist, deren Einträge Funktionen sind, die von irgendwelchen Variablen abhängen.
Für diese gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} A^t A &= I \\ (dA)^t A + A^t dA &= 0 \\ A^{-t}(dA)^t + dAA^{-1} &= 0 \\ (dAA^{-1})^t + dAA^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Davon gilt auch folgende Umkehrung:
Sei A eine Matrix von Funktionen die auf einem Gebiet $\bigcup$ definiert sind und sei A in einem Punkt auf $\bigcup$ orthogonal und gilt

$$dA = \Lambda A$$

wobei Λ eine schiefsymmetrische Matrix aus Einsformen ist, so ist A auf ganz $\bigcup$ orthogonal.

Wir setzen $C = A^t A$ und erhalten daraus

$$dC = (dA)^t A + A^t(dA) = (-A^t\Lambda)A + A^t(\Lambda A) = 0$$

wobei C eine konstante Matrix auf $\bigcup$ ist
Wie nehmen dabei an, dass $C = I$ an einem Punkt auf $\bigcup$ ist, somit $A^t A = I$ auf $\bigcup$ ist und A damit orthogonal ist.

3 Der Laplaceoperator in orthogonalen Koordinaten

Aus Kapitel 1 und 2 ist bekannt, dass dx, dy, dz eine Orthonormalbasis im Euklidischen Raum für Einsformen bildet und dieses ähnlich zum festen Koordinatensystem $\mathbf{i}$ ist.
aus

$$\mathbf{e} = B\mathbf{i}, \qquad d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e} = (dx, dy, dz)\mathbf{i}$$

bekommen wir

$$\sigma B = (dx, dy, dz)$$

und damit ist $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eine Orthonormalbasis aus Einsformen wenn B orthogonal ist.

Sei f eine Funktion im $\mathbf{E}^3$. Dann haben wir

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x}dydz + \frac{\partial f}{\partial y}dzdx + \frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$

$$d * df = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2})dxdydz = (\Delta f)dxdydz$$

Der $*$ Operator kann ebenso in orthonormalen Koordinatensystemen errechnet werden.

Da $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = dxdydz$ soll nun df in Abhängigkeit von den σ_i ausgedrückt werden

$$df = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

$$*df = a_1\sigma_2\sigma_3 + a_2\sigma_1\sigma_3 + a_3\sigma_1\sigma_2$$

$$d * df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Ein Koordinatensystem u, v, w im $\mathbf{E}^3$ ist genau dann ein orthogonales wenn die Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

paarweise senkrecht zueinender sind.
Das heißt, dass für geeignete Funktionen λ, μ, ν die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

ein orthonormales oder dynamisches Koordinatensystem bilden.

Nun kann man $d\mathbf{x}$ wieder über die $\mathbf{e}_i$ ausgedrückt werden.

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} dw$$

$$= (\lambda du)\mathbf{e}_1 + (\mu dv)\mathbf{e}_2 + (\nu dw)\mathbf{e}_3$$

mit

$$\sigma_1 = \lambda du, \quad \sigma_2 = \mu dv, \quad \sigma_3 = \nu dw$$

Die ein orthogonales Koordinatensystem für Einsformen bilden

Nun berechnen wir den Laplaceoperator:

$$\begin{aligned} df &= f_u du + f_v dv + f_w dw \\ &= (f_u/\lambda)\sigma_1 + (f_v/\mu)\sigma_2 + (f_w/\nu)\sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *df &= (f_u/\lambda)\sigma_2\sigma_3 + (f_v/\mu)\sigma_1\sigma_3 + (f_w/\nu)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\mu\nu f_u/\lambda)\,dvdw + (\lambda\nu f_v/\mu)\,dwdu + (\lambda\mu f_w/\nu)\,dudv \end{aligned}$$

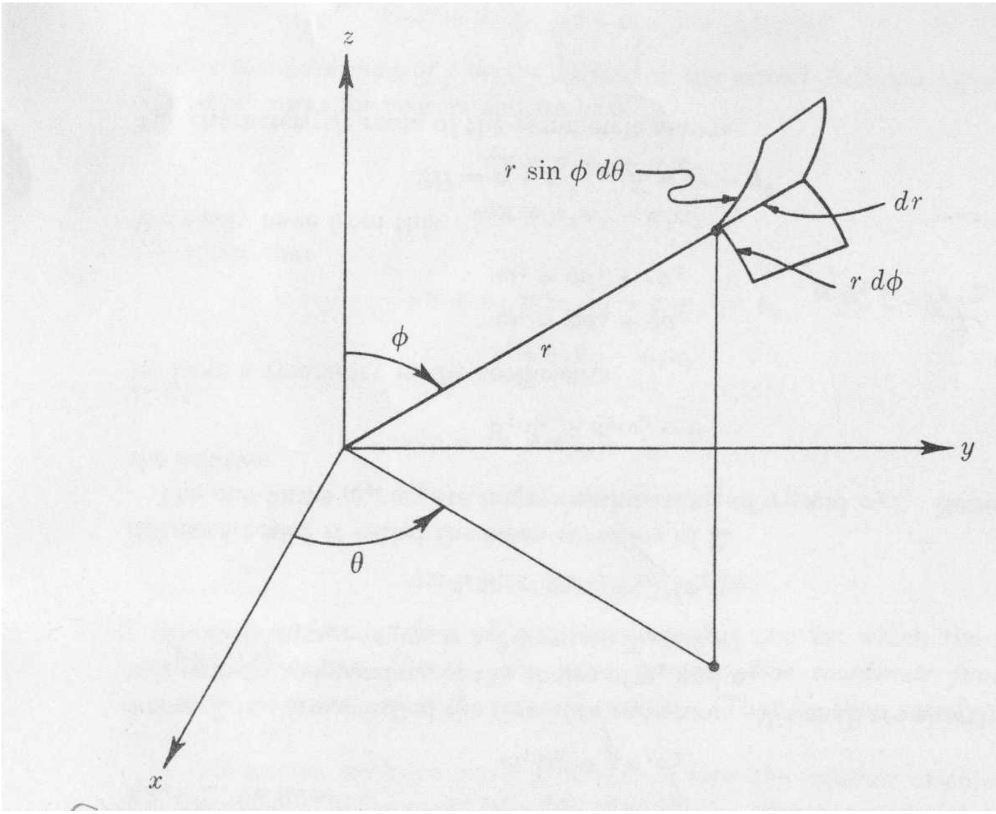
wir vergleichen dies mit vorherigem $d * df$

$$d * df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \lambda\mu\nu(\Delta f)\,dudvdw$$

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

Dies soll nun auf Kugelkoordinaten angewandt werden

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$
$$y = r \sin \phi \sin \theta$$
$$z = r \cos \phi$$



$$\sigma_1 = dr, \quad \sigma_2 = r\,d\phi, \quad \sigma_3 = r\sin\phi\,d\theta$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\phi\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right]$$

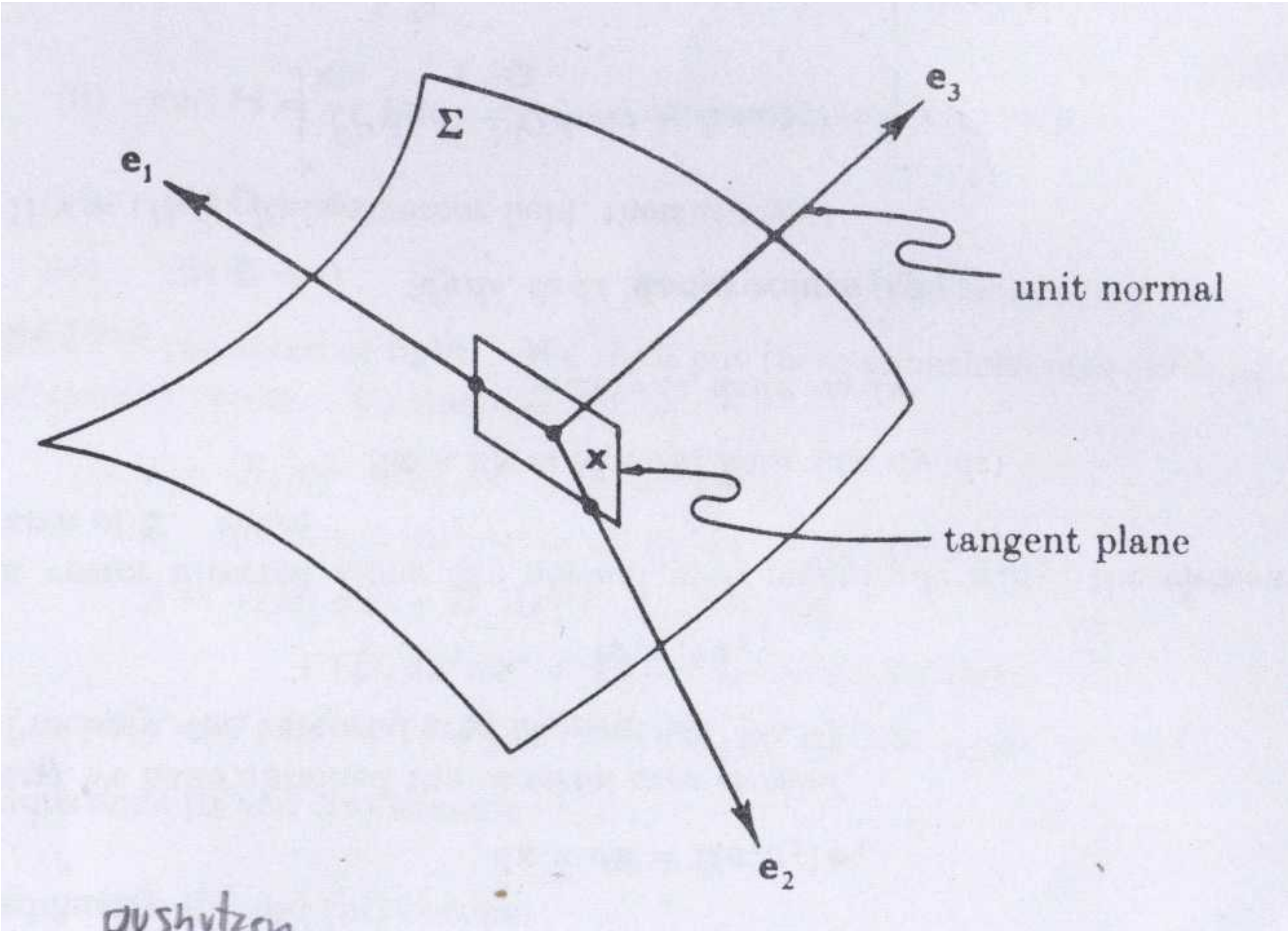
4 Flächen

Wir betrachten nun eine glatte Fläche Σ in $\mathbf{E}^3$.

- wählen $\mathbf{e}$ als bewegliches Koordinatensystem für alle Punkte $\mathbf{x}$ auf Σ
- $\mathbf{e}_3$ ist die Normale, die auf der Fläche steht
- $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ bilden die Tangentialebene in jedem Punkt

Solange $\mathbf{x}$ sich nur auf der Fläche bewegt muss $d\mathbf{x}$ in der Tangentialebene liegen

$$d\mathbf{x} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \quad (\sigma_3 = 0)$$


$\mathbf{e}_3$
Σ
$\mathbf{e}_1$
unit normal
$\mathbf{x}$
tangent plane
$\mathbf{e}_2$

Wegen der Schiefsymmetrie von Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} & -\omega_1 \\ -\bar{\omega} & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Strukturgleichungen und Integrabilitätsbedingungen sind nun

Stukturgleichungen

$$\left\{ \begin{gathered} d\mathbf{x} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_1 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_1 = \bar{\omega} \mathbf{e}_2 - \omega_1 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = -\bar{\omega} \mathbf{e}_1 - \omega_2 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 \end{gathered} \right\}$$

Integrabilitätsbedingungen

$$\left\{ \begin{gathered} d\sigma_1 = \bar{\omega}\sigma_2 \\ d\sigma_2 = -\bar{\omega}\sigma_1 \\ \sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2 = 0 \\ d\bar{\omega} + \omega_1\omega_2 = 0 \\ d\omega_1 = \bar{\omega}\omega_2 \\ d\omega_2 = -\bar{\omega}\omega_1 \end{gathered} \right\}$$

Wir wollen nun die vorhergegangenen Gleichungen über Krümmungen und Kurven beschreiben

- $\sigma_1\sigma_2$ ist das Flächenelement von Σ
- wenn $\mathbf{x}$ sich auf Σ bewegt, so bewegt sich $\mathbf{e}_3$ über eine Einheitssphäre $\mathbf{S}^2$
- $\mathbf{S}^2$ wird normales oder sphärisches Abbild von Σ genannt
- da $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ orthogonal zu $\mathbf{e}_3$ sind liegen sie in der Tangentialebene zum sphärischen Abbild und biden dort ein Koordinatensystem
- die Gleichung $d\mathbf{e}_3 = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$ spielt die selbe Rolle für das sphärische Abbild wie $d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2$ für die Fläche Σ
- daher ist $\omega_1\omega_2$ das Flächenelement des sphärischen Abbildes

Da es im 2-dimensionalen Raum Σ nur eine linear unabhängige Zweiform gibt, gilt

$$\omega_1\omega_2 = K\sigma_1\sigma_2$$

wobei der Skalar K die Gaußkrümmung genannt wird.

Man sieht, dass dies unabhängig von der Wahl von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ ist

Gleichermaßen ist $\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1$ eine 2-Form auf Σ, sodass

$$\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1 = 2H\sigma_1\sigma_2$$

wobei der Skalar H als Durchschnittskrümmung von Σ bezeichnet wird

Wegen

$$\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2 = 0$$

sind die Einsformen ω_1, ω_2 Linearkombinationen aus σ_1 und σ_2
Also kann man, mit symmetrischen Koeffizienten, schreiben

$$\omega_1 = p\sigma_1 + q\sigma_2$$
$$\omega_2 = q\sigma_1 + r\sigma_2$$

Daraus ergibt sich dann

$$2H = p + r, \qquad K = pr - q^2$$

Die Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

werden als Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 von Σbezeichnet
und daraus ergibt sich

$$2H = \kappa_1 + \kappa_2, \qquad K = \kappa_1\kappa_2$$

Aus der Beziehung $d\varpi + \omega_1\omega_2 = 0$ erhalten wir

$$d\varpi + K\sigma_1\sigma_2 = 0$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir K wenn wir σ_1, σ_2 und ϖ kennen
Aber

$$d\sigma_1 = \varpi\sigma_2 \qquad d\sigma_2 = -\varpi\sigma_1$$

genügen um ϖ zu berechnen wenn σ_1 , σ_2 gegeben sind

Das bedeutet, dass K von σ_1 und σ_2 bestimmt wird.

5 Maxwells Feldgleichungen

$\mathbf{E}$ = elektrisches Feld
$\mathbf{H}$ = magnetisches Feld
$\mathbf{B}$ = Magnetfelddichte
$\mathbf{J}$ = elektrische Stromdichte
$\mathbf{D}$ = dielektrische Verschiebung
p = Ladungsdichte

Die vier Maxwellgleichungen sind

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi p \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichungen sollen nun über Differentialformen ausgedrückt werden:
wir setzen

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + (B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2)$$

$$\beta = -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + (D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2)$$

$$\gamma = (J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2)dt - p dx^1 dx^2 dx^3$$

Gleichung (1) und (4) werden zu

$$d\alpha = 0$$

Gleichung (2) und (3) werden zu

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0$$

Im Vakuum vereinfachen sich die Größen zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B},$$
$$\mathbf{J} = 0, \qquad p = 0$$

sodass die Maxwellgleichungen nun folgendermaßen aussehen

$$\mathrm{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0$$
$$\mathrm{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0$$

Drückt man diese Maxwellgleichungen im Vakuum wieder über Differentialformen aus, so erhällt man aus

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + (B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2)$$

$$\beta = -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + (D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2) = *\alpha$$

folglich die Gleichungen

$$\begin{cases} d\alpha = 0 \\ d * \alpha = 0 \end{cases}$$