Mannigfaltigkeiten und Integration I

Martin Jochum

16. Dezember 2008

Gliederung

Mannigfaltigkeiten

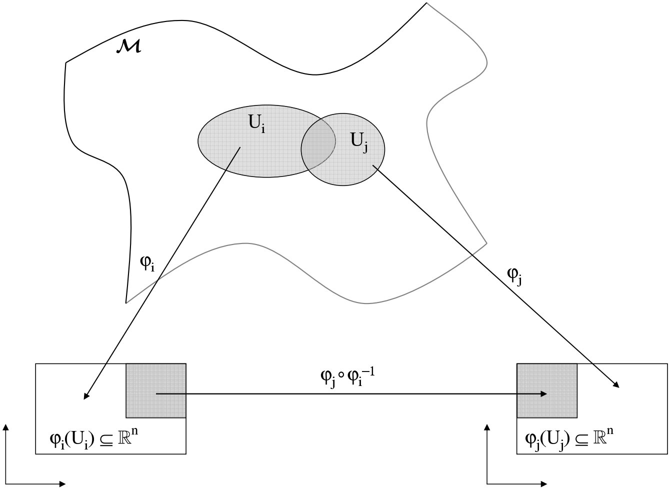
Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Menge von offenen Teilmengen $U_i \subseteq \mathcal{M}, i = 1 \dots m$, sodass gilt:

1. Die Teilmengen $U_i, i = 1 \dots m$ stellen eine Überdeckung von $\mathcal{M}$ dar, d. h. es gilt
$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i.$$
2. Auf jeder Teilmenge $U_i, i = 1 \dots m$ existiert ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus)
$$\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n.$$
3. Für jede Kombination i, j, sodass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt, ist die Komposition
$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$$
ein Homömorphismus (Diffeomorphismus) zwischen $\phi_i(U_i \cap U_j)$ und $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Bezeichnungen

- Die Teilmengen $U_i, i = 1 \dots m$ werden *Kartengebiete* genannt.
- Die Abbildungen $\phi_i : U_i \longrightarrow \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ werden als *Karten* bezeichnet.
- Die Menge $\mathfrak{A} = \{(U_i, \phi_i), i = 1 \dots m\}$ heißt *Atlas* von $\mathcal{M}$.



$\mathcal{M}$
U_i
U_j
φ_i
φ_j
$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$
$\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$
$\varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$

Koordinatenwechsel

- Betrachte Kartengebiete U_I mit lokalen Koordinaten $x^1, \dots, x^n$ und U_J mit lokalen Koordinaten $y^1, \dots, y^n$, sodass $U_I \cap U_J \neq \emptyset$.
- y^i bzw. x^j auf Überlappung $U_I \cap U_J$ als glatte Funktionen der x^i bzw. y^j darstellbar

$$
\begin{aligned}
y^j &= y^j(x^1, \dots, x^n) && j = 1, \dots, n \\
x^i &= x^i(y^1, \dots, y^n) && i = 1, \dots, n \\
\Rightarrow y^j &= y^j(\mathbf{x}(y^1, \dots, y^n))
\end{aligned}
$$

- Ableitung nach den y ergibt

$$
\delta^j_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right\| = \mathbf{I}.
$$

- Für die Jacobi-Determinanten gilt

$$
\frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \neq 0 \text{ auf ganz } U_I \cap U_J
$$

Orientierbarkeit

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist orientierbar, falls die lokalen Koordinaten $x^i, i = 1 \ldots n$ auf U_I bzw. y^j auf $U_J, j = 1 \ldots n$ auf jeder Überlappung $U_I \cap U_J$ so gewählt werden können, dass für die Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} > 0$$

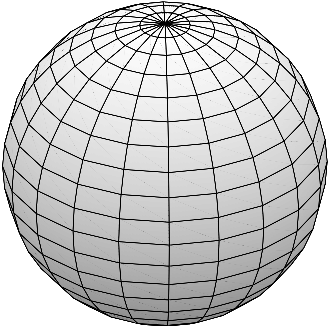
gilt.

Falls $\mathcal{M}$ orientierbar ist, sind zwei verschiedene Orientierungen möglich:

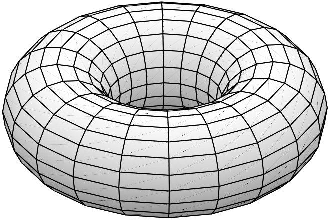
- Die Erste folgt, bis auf eine gerade Permutation, aus der Wahl der lokalen Koordinaten.
- Die Zweite folgt aus einer ungeraden Permutation der lokalen Koordinaten.

Orientierbare Mannigfaltigkeiten

- Oberfläche einer Kugel

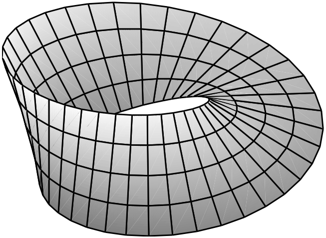


- Oberfläche eines Torus

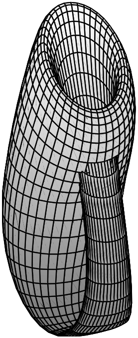


Nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten

- Möbiusband



- Kleinsche Flasche



Reellwertige glatte Funktion

Sei $\mathcal{M}$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und f eine reellwertige Funktion auf $\mathcal{M}$

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist glatt in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$, falls es ein Kartengebiet $U \subseteq \mathcal{M}$ mit $P \in U$ und eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ gibt, sodass

$$f(P) = f(\phi^{-1}(x^1, \ldots, x^n))$$

glatt bzgl. der lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ ist. Eine Funktion ist glatt auf ganz $\mathcal{M}$, wenn sie in jedem Punkt von $\mathcal{M}$ glatt ist.

Glatte Funktion

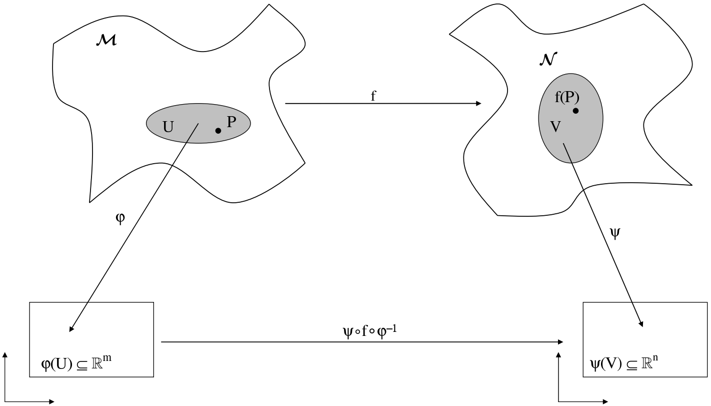
Seien $\mathcal{M}$ *und* $\mathcal{N}$ *zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension* m *bzw.* n *und* f *eine Funktion*

$$f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}.$$

Die Funktion f *ist glatt in einem Punkt* $P \in \mathcal{M}$*, falls es ein Kartengebiet* $U \subseteq \mathcal{M}$ *mit* $P \in U$ *bzw.* $V \subseteq \mathcal{N}$ *mit* $f(P) \in V$ *und eine Karte* $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ *mit lokalen Koordinaten* $x^1, \dots, x^m$ *bzw.* $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ *mit lokalen Koordinaten* $y^1, \dots, y^n$ *gibt, sodass die Komposition*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

glatt bzgl. der lokalen Koordinaten ist.


$\mathcal{M}$
U
P
f
$\mathcal{N}$
f(P)
V
φ
ψ
ψ∘f∘φ⁻¹
φ(U) ⊆ ℝ^m
ψ(V) ⊆ ℝ^n

Untermannigfaltigkeit

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Man nennt $\mathcal{M}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{N}$, falls eine Abbildung

$$i : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

so existiert, dass in lokalen Koordinaten der Rang der Jacobi-Matrix $\left\| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right\|$ der Abbildung i stets gleich m ist.

Die Abbildung i wird als *Einbettung* bezeichnet. Grundsätzlich kann jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit in einen $\mathbb{R}^N$ mit $N = 2m + 1$ eingebettet werden.

- Eine Definition der Tangentialvektoren in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ unabhängig von gerichteten Pfeilen wird benötigt.
- Eine Möglichkeit hierzu ist die Interpretation eines Tangentialvektors als *Richtungsableitung*
- **Beispiel**: Sei $P \in \mathbb{E}^3$ und $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ein Vektor im Punkt P. Dann wird der Vektor $\mathbf{v}$ mit dem Operator

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \bigg|_P .$$

identifiziert.

Tangentialvektor

Sei $\mathcal{M}$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $P \in \mathcal{M}$ ein Punkt von $\mathcal{M}$ und $\mathbf{F}^0(\mathcal{M})$ der Raum der reellwertigen glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$. Ein Tangentialvektor $\mathbf{v}$ in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ ist ein Operator

$$\mathbf{v} : \mathbf{F}^0(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

der den Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(af + bg) &= a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g) && \text{Linearität} \\ \mathbf{v}(fg) &= g(P)\mathbf{v}(f) + f(P)\mathbf{v}(g) && \text{Produktregel} \end{aligned}$$

für beliebige $f, g \in \mathbf{F}^0(\mathcal{M})$ und konstante $a, b \in \mathbb{R}$ genügt.

- Ist U eine Umgebung von P mit lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$, so ist jeder der Operatoren

$$\mathbf{v}_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$$

ein Tangentialvektor im Punkt P.
- Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren im Punkt P bildet den Tangentialraum $\mathcal{T}_P\mathcal{M}$ an $\mathcal{M}$ im Punkt P.
- Die zuvor eingeführten Tangentialvektoren $\mathbf{v}_i, i = 1 \ldots n$ bilden eine Basis des Tangentialraumes.

Beweis:
In lokalen Koordinaten habe der Punkt $P \in \mathcal{M}$ die Form $\mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n)$, $\mathbf{v}$ sei ein Tangentialvektor im Punkt P und es gelte

$$\mathbf{v}(x^i) = \mathbf{v}(x^i - c^i) = a^i.$$

Darüber hinaus sei f eine beliebige glatte Funktion auf $\mathcal{M}$. Eine nach dem linearen Term abgebrochene Taylorreihen-Entwicklung dieser Funktion ergibt

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - c^i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P$$

Anwendung des Tangentialvektors $\mathbf{v}$ hierauf liefert

$$\mathbf{v}\,(f) = \mathbf{v}\,(f(\mathbf{c})) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(x^i - c^i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P + \sum_{i=1}^{n} (c^i - c^i)\mathbf{v}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P \right) = \sum_{i=1}^{n} a^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P .$$

Hieraus folgt $\mathbf{v}$ in der Form

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P ,$$

d. h. ein beliebiger Tangentialvektor lässt sich als Linearkombination der $\mathbf{v}_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$ darstellen. Somit sind die $\mathbf{v}_i$ eine Basis des Tangentialraumes.

- Die $a^i, i = 1 \dots n$ sind die Komponenten von $\mathbf{v}$ bzgl. des lokalen Koordinatensystems $x^1, \dots, x^n$
- Ist ein zweites Koordinatensystem $y^1, \dots, y^n$ mit

  $$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} b^i \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_P$$

  gegeben, so gilt

  $$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_P .$$

  Dies entspricht der Transformationregel für die kontravarianten Komponenten eines Vektors.
- Ein *Tangentialvektorfeld* ist eine glatte Zuordnung eines Tangentenvektors zu jedem Punkt $P \in \mathcal{M}$, d. h. in lokalen Koordinaten ergibt sich für das Vektorfeld $\mathbf{v}$ die Darstellung

  $$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

  wobei die $a^i(\mathbf{x}), i = 1 \dots n$ als glatt angenommen werden.

- Die glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$ werden wiederum als *0-Formen* bezeichnet und bilden den Raum $\mathbf{F}^0(\mathcal{M})$
- Eine *1-Form* ω in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ hat bzgl. lokaler Koodinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ die Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i$$

- Ist im Punkt P ein zweites lokales Koordinatensystem $(y^1, \ldots, y^n)$ mit

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} b_j dy^j$$

gegeben, so genügen die Koeffizienten a_i, b_j der Beziehung

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_P .$$

Dies entspricht der Transformationsregel für die kovarianten Komponenten eines Vektors.

- Die p-Formen in einem Punkt P ergeben sich dann durch Bildung von Summen von äußeren Produkten von 1-Formen
- Allgemein folgen die p-Formen auf $\mathcal{M}$ indem jedem Punkt von $\mathcal{M}$ eine p-Form

  $$\omega = \sum a_H(\mathbf{x}) dx^H$$

  zugeordnet wird, wobei die $a_H(\mathbf{x})$ bzgl. der lokalen Koordinaten glatte Funktionen sein sollen.
- Das Verhalten bei Koordinatenwechseln von $(x^1, \ldots, x^n)$ nach $(y^1, \ldots, y^n)$ ergibt sich aus

  $$dy^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i.$$

- Alle lokalen Eigenschaften übertragen sich entsprechend auf Mannigfaltigkeiten
- Ist eine Abbildung

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

zwischen den m- bzw. n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ gegeben, so wird hierdurch eine Abbildung

$$\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathcal{N}) \to \mathbf{F}^p(\mathcal{M})$$

induziert.
- Vollkommen analog zur lokalen Theorie ergibt sich
  1. $\phi^*(\omega + \eta) = \phi^*\omega + \phi^*\eta$,
  2. $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$,
  3. $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}^p(\mathcal{M}) & \stackrel{\phi^*}{\longleftarrow} & \mathbf{F}^p(\mathcal{N}) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \mathbf{F}^{p+1}(\mathcal{M}) & \stackrel{\phi^*}{\longleftarrow} & \mathbf{F}^{p+1}(\mathcal{N}) \end{array}$$

Euklidische Simplizes

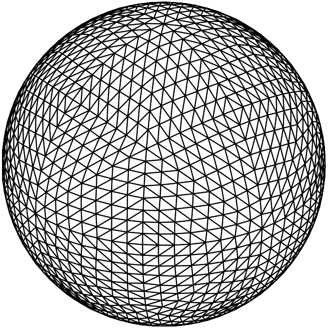
- n-dimensionale Euklidische Simplizes stellen die Integrationsgebiete dar, auf denen später die Integration von n-Formen durchgeführt wird.
- Beispiele:
  1. Ein 0-Simplex ist ein einzelner Punkt (P_0).
  2. Ein 1-Simplex ist ein gerichtetes Geradenstück, festgelegt durch seinen Anfangs- und Endpunkt (P_0, P_1).
  3. Ein 2-Simplex ist ein geschlossenes Dreieck, festgelegt durch seine drei Eckpunkte (P_0, P_1, P_2).
  4. Ein 3-Simplex ist ein Tetraeder, festgelegt durch die vier Eckpunkte (P_0, P_1, P_2, P_3).
  5. $\ldots$
- Allgemein ist ein n-Simplex $\mathbf{s}^n$ die konvexe Hülle der $n+1$ Punkte $(P_0, \ldots, P_n)$:

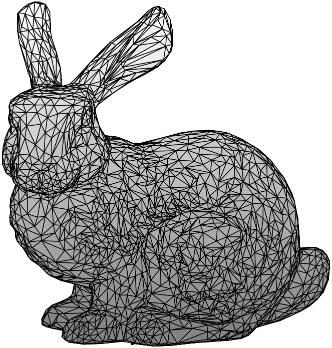
$$\mathbf{s}^n = (P_0, \ldots, P_n) = \left\{ P | P = t_0 P_0 + \cdots + t_n P_n,\ 0 \leq t_i, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

- Als *standard n-Simplex* wird der Simplex $\bar{\mathbf{s}}^n = (R_0, \ldots, R_n)$ mit

$$\begin{aligned} R_0 &= (0,0,0,\ldots,0,0) \\ R_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0) \\ R_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0) \\ &\vdots \\ R_n &= (0,0,0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

bezeichnet.





Motivation

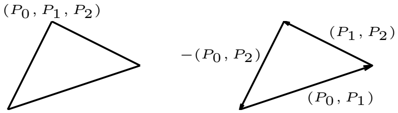
- Komplexe Geometrien können aus Simplizes zusammengesetzt werden.

- Der Rand $\partial \mathbf{s}$ eines Simplex $\mathbf{s}$ ist eine formale Summe von Simplizes deren Dimension um eins geringer ist als jene von $\mathbf{s}$

$$\partial(P_0, \ldots, P_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n)$$

- Beispiele:

1. 1-Simplex:
   $\partial(P_0, P_1) = (P_1) - (P_0)$
2. 2-Simplex:
   $\partial(P_0, P_1, P_2) =$
   $(P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)$
3. 3-Simplex:
   $\partial(P_0, P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3) -$
   $(P_0, P_2, P_3) + (P_0, P_1, P_3) - (P_0, P_1, P_2)$



- Eine n-Kette ist eine formale Summe der Form

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{N} a^i \mathbf{s}_i,$$

wobei die a^i Konstanten und die $\mathbf{s}_i$ n-Simplizes sind.

- Der Rand einer n-Kette ist definiert als

$$\partial\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{N} a^i \partial(\mathbf{s}_i),$$

wobei gilt, dass der Rand einer Kette selbst keinen Rand besitzt, d. h.

$$\partial(\partial\mathbf{c}) = 0.$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!