Klassische Elektrodynamik

Pascal Peter

13.01.09

Gliederung

Teilgebiet der Physik:

Eigenschaften und Wirkungen elektrischer und magnetischer Felder

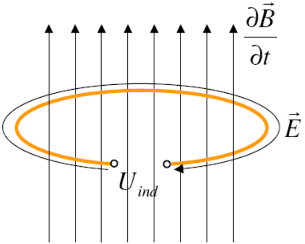
- Entstehung (Induktion, Verschiebungsstrom)
- Ausbreitung (elektromagnetische Wellen)
- Wirkung auf Materie (Kräfte)

Induktion

- Ein zeitabhängiges Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld.

Beispiel:

- Ein zeitabhängiges magnetisches Feld induziert Spannung U_{ind} an einer Leiterschleife.
- Dies erzeugt wirbelförmiges elektrisches Feld entlang der Schleife.

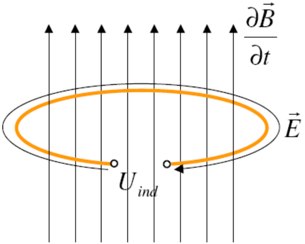


Induktion

- Ein zeitabhängiges Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld.

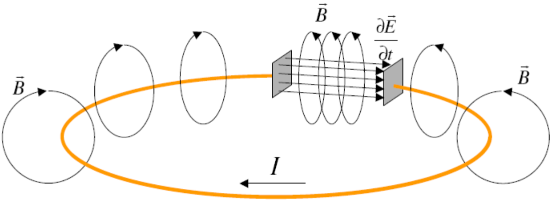
Beispiel:

- Ein zeitabhängiges magnetisches Feld induziert Spannung U_{ind} an einer Leiterschleife.
- Dies erzeugt wirbelförmiges elektrisches Feld entlang der Schleife.



Verschiebungsstrom

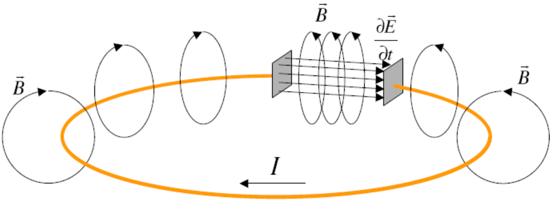
- Ein zeitabhängiges elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld.



Beispiel:

- Ein elektrisches Feld in einem Kondensator wächst linear mit der Zeit an.
- Dies erzeugt wirbelförmiges Magnetfeld um das elektrische Feld.

- Ein zeitabhängiges elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld.



Beispiel:

- Ein elektrisches Feld in einem Kondensator wächst linear mit der Zeit an.
- Dies erzeugt wirbelförmiges Magnetfeld um das elektrische Feld.

Die maxwellschen Gleichungen

- 1865: Beschreibung der zeitlichen Entwicklung elektromagnetischer Felder im Raum durch die Maxwell-Gleichungen.
- Gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen.
- Zählen zu den wichtigsten Gleichungen der Physik.

Abbildung: J.C. Maxwell (1831–1879)

Vektornotation der Maxwellschen Gleichungen

Maxwellsche Gleichungen

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} \overrightarrow{E} \qquad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} \overrightarrow{B} - 4\pi J \qquad \text{(Verallgemeinertes Ampèresches Gesetz)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \qquad \text{(Quellenfreiheit des Magnetfelds)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

Lorentz-Kraft

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$$

$\overrightarrow{E}$: Elektrische Feldstärke, $\overrightarrow{B}$: Magnetische Flussdichte,
J: magnetische Polarisation, ρ: Ladungsdichte, $\overrightarrow{F}$: Lorentz-Kraft,
q: elektrische Ladung, v: Geschwindigkeit

Vektornotation der Maxwellschen Gleichungen

Maxwellsche Gleichungen

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E} \qquad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B} - 4\pi J \qquad \text{(Verallgemeinertes Ampèresches Gesetz)}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \qquad \text{(Quellenfreiheit des Magnetfelds)}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

Lorentz-Kraft

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$$

$\overrightarrow{E}$: Elektrische Feldstärke, $\overrightarrow{B}$: Magnetische Flussdichte,
J: magnetische Polarisation, ρ: Ladungsdichte, $\overrightarrow{F}$: Lorentz-Kraft,
q: elektrische Ladung, v: Geschwindigkeit

Vektornotation der Maxwellschen Gleichungen

Maxwellsche Gleichungen

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} \overrightarrow{E} \qquad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} \overrightarrow{B} - 4\pi J \qquad \text{(Verallgemeinertes Ampèresches Gesetz)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \qquad \text{(Quellenfreiheit des Magnetfelds)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

Lorentz-Kraft

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$$

$\overrightarrow{E}$: Elektrische Feldstärke, $\overrightarrow{B}$: Magnetische Flussdichte,
J: magnetische Polarisation, ρ: Ladungsdichte, $\overrightarrow{F}$: Lorentz-Kraft,
q: elektrische Ladung, v: Geschwindigkeit

Differentialform-Darstellung im dreidimensionalen Ansatz

Darstellung der Felder durch Differentialformen

- Dreidimensionaler Ansatz: Zeit als Parameter.
- Interpretation der Lorentzkraft F: 1-Form.
- Aus $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$ folgt also: E und $v \times B$ sind 1-Formen.

Darstellung der Felder durch Differentialformen

- Dreidimensionaler Ansatz: Zeit als Parameter.
- Interpretation der Lorentzkraft F: 1-Form.
- Aus $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$ folgt also: E und $v \times B$ sind 1-Formen.

Darstellung der Felder durch Differentialformen

- Die elektrische Feldstärke wird durch eine 1-Form repräsentiert:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz = \overrightarrow{E}\, dq \tag{1}$$

Hierbei sind E_x, E_y, E_z die kartesischen Komponenten des elektrischen Feldes.

Darstellung der Felder durch Differentialformen

- B bezeichnet die Flächendichte des magnetischen Flusses, d.h. B muss über Flächen integrierbar sein.

- Daher stellen wir B durch eine 2-Form dar:

$$B = B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx = \overrightarrow{B}\theta \qquad (2)$$

Darstellung der Felder durch Differentialformen

- B bezeichnet die Flächendichte des magnetischen Flusses, d.h. B muss über Flächen integrierbar sein.
- Daher stellen wir B durch eine 2-Form dar:

$$B = B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx = \overrightarrow{B}\,\theta \tag{2}$$

Divergenz und Rotation

- Wie lässt sich $\mathrm{rot} E$ in der Differentialformnotation darstellen?

$$dE = (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})dydz + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})dzdx$$

$$= (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E})\theta$$

- Wie lässt sich $\mathrm{div} B$ in der Differentialformnotation darstellen?

$$dB = (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz = \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\,\Theta$$

Divergenz und Rotation

- Wie lässt sich $\mathrm{rot} E$ in der Differentialformnotation darstellen?

$$dE = (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})dydz + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})dzdx$$

$$= (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E})\theta$$

- Wie lässt sich $\mathrm{div} B$ in der Differentialformnotation darstellen?

$$dB = (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz = \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\,\Theta$$

Divergenz und Rotation

Erinnerung

Für $\omega = \sum a_H dx^H \in \bigwedge^p L$, $\dim L = n$ gilt per Definition:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dx^i dx^H$$

$$dB = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z} dzdxdy + \frac{\partial B_x}{\partial x} dxdydz$$

$$+ \frac{\partial B_y}{\partial y} dydzdx = \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right) dxdydz$$

Divergenz und Rotation

Erinnerung

Für $\omega = \sum a_H dx^H \in \bigwedge^p L$, $\dim L = n$ gilt per Definition:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dx^i dx^H$$

$$dB = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z} dzdxdy + \frac{\partial B_x}{\partial x} dxdydz$$

$$+ \frac{\partial B_y}{\partial y} dydzdx = (\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}) dxdydz$$

Divergenz und Rotation

- Durch Anwendung des Stern-Operators auf E und B erhalten wir:

$$*E = E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy$$

$$*B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

- Also gilt auch:

$$d * E = (\mathrm{div}\,\overrightarrow{E})\Theta$$

$$d * B = (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B})\theta$$

Divergenz und Rotation

- Durch Anwendung des Stern-Operators auf E und B erhalten wir:

$$*E = E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy$$

$$*B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

- Also gilt auch:

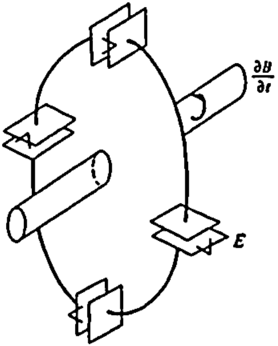
$$d * E = (\operatorname{div} \overrightarrow{E})\Theta$$

$$d * B = (\operatorname{rot} \overrightarrow{B})\theta$$

Faradaysches Induktionsgesetz

- Aus $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}$ erhalten wir mit $(\mathrm{rot}\,\vec{E})\theta = dE$:

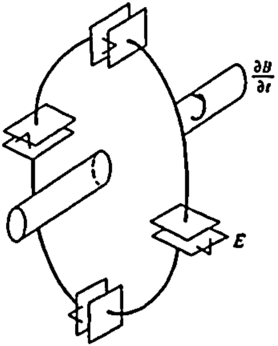
$$\frac{\partial B}{\partial t} = -dE$$



Faradaysches Induktionsgesetz

- Aus $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}$ erhalten wir mit $(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E})\theta = dE$:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -dE$$



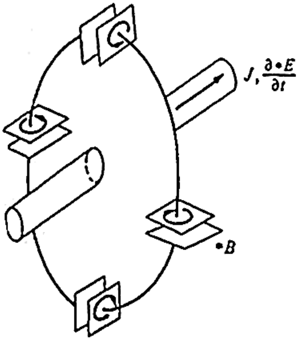
Verallgemeinertes Ampèrsches Gesetz

- Aus $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B} - 4\pi \overrightarrow{J}$ erhalten wir mit $d * B = (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B})\theta$:

$$\frac{\partial * E}{\partial t} = d * B - 4\pi J$$

mit der 2-Form

$$J = J_x dydz + J_y dzdx + J_z dxdy$$



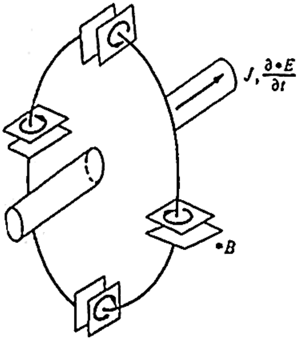
Verallgemeinertes Ampèrsches Gesetz

- Aus $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B} - 4\pi\overrightarrow{J}$ erhalten wir mit $d * B = (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B})\theta$:

$$\frac{\partial * E}{\partial t} = d * B - 4\pi J$$

mit der 2-Form

$$J = J_x dydz + J_y dzdx + J_z dxdy$$



Quellenfreiheit und Poisson-Gleichung

- $\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0$ wird mit $dB = \operatorname{div} \overrightarrow{B}\,\Theta$ zu:

$$dB = 0$$

- $\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 4\pi\rho$ wird mit $d * E = (\operatorname{div} \overrightarrow{E})\Theta$ zu:

$$d * E = 4\pi\rho\Theta$$

Quellenfreiheit und Poisson-Gleichung

- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$ wird mit $dB = \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\,\Theta$ zu:

$$dB = 0$$

- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 4\pi\rho$ wird mit $d * E = (\mathrm{div}\,\overrightarrow{E})\Theta$ zu:

$$d * E = 4\pi\rho\Theta$$

Kontraktions-Operator und Lorentz-Kraft

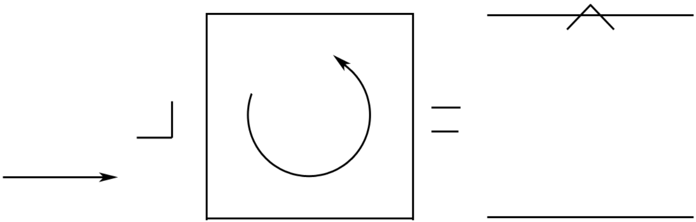
Der Kontraktions-Operator

Definition

- Es seien $a_2, a_3, \ldots, a_r \in V$ beliebige Tangentialvektoren
- Wir definieren $\lrcorner : V \times \Lambda^r \longrightarrow \Lambda^{r-1};\ (a, \omega) \mapsto a \lrcorner \omega$ mit

$$(a \lrcorner \omega)(a_2, a_3, \ldots, a_r) = \omega(a, a_2, a_3, \ldots, a_r)$$

Beispiel



$$\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner dxdy = dy$$

Beweis:

$$v \lrcorner B =$$

$$= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \lrcorner (B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) =$$

$$= v_x B_z dy - v_x B_y dz - v_y B_z dx + v_y B_x dz - v_z B_x dy + v_z B_y dx =$$

$$= (v_z B_y - v_y B_z) dx + (v_x B_z - v_z B_x) dy + (v_y B_x - v_x B_y) dz =$$

$$= (v \times \overrightarrow{B}) dq$$

Lorentz-Kraft

Beweis:

$$v \lrcorner B =$$

$$= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \lrcorner (B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) =$$

$$= v_x B_z dy - v_x B_y dz - v_y B_z dx + v_y B_x dz - v_z B_x dy + v_z B_y dx =$$

$$= (v_z B_y - v_y B_z) dx + (v_x B_z - v_z B_x) dy + (v_y B_x - v_x B_y) dz =$$

$$= (v \times \overrightarrow{B}) dq$$

Lorentz-Kraft

Beweis:

$$v \lrcorner B =$$

$$= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \lrcorner (B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) =$$

$$= v_x B_z dy - v_x B_y dz - v_y B_z dx + v_y B_x dz - v_z B_x dy + v_z B_y dx =$$

$$= (v_z B_y - v_y B_z)dx + (v_x B_z - v_z B_x)dy + (v_y B_x - v_x B_y)dz =$$

$$= (v \times \overrightarrow{B})dq$$

Lorentz-Kraft

Beweis:

$$v \lrcorner B =$$

$$= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \lrcorner (B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) =$$

$$= v_x B_z dy - v_x B_y dz - v_y B_z dx + v_y B_x dz - v_z B_x dy + v_z B_y dx =$$

$$= (v_z B_y - v_y B_z) dx + (v_x B_z - v_z B_x) dy + (v_y B_x - v_x B_y) dz =$$

$$= (v \times \overrightarrow{B}) dq$$

Lorentz-Kraft

Beweis:

$$v \lrcorner B =$$

$$= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \lrcorner (B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) =$$

$$= v_x B_z dy - v_x B_y dz - v_y B_z dx + v_y B_x dz - v_z B_x dy + v_z B_y dx =$$

$$= (v_z B_y - v_y B_z) dx + (v_x B_z - v_z B_x) dy + (v_y B_x - v_x B_y) dz =$$

$$= (v \times \overrightarrow{B}) dq$$

Notationen im Vergleich

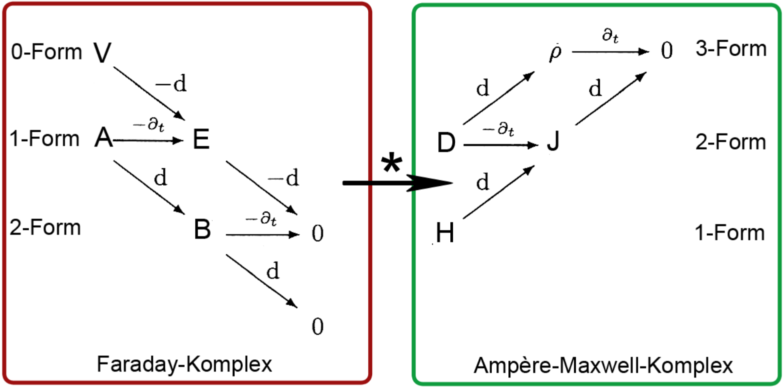
Vektornotation

- $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}$
- $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B} - 4\pi\,\overrightarrow{J}$
- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$
- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 4\pi\rho$
- $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + v \times \overrightarrow{B})$

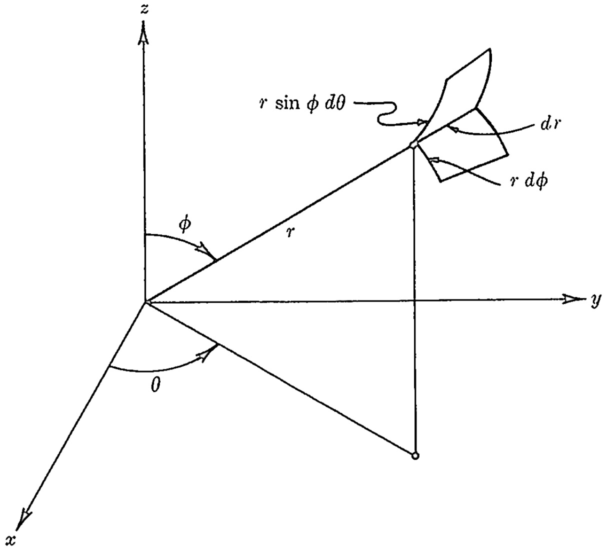
Differentialform-Notation

- $\frac{\partial B}{\partial t} = -dE$
- $\frac{\partial * E}{\partial t} = d * B - 4\pi J$
- $dB = 0$
- $d * E = 4\pi\rho\theta$
- $F = q(E - v \lrcorner B)$

Tonti-Diagramm



Kugelkoordinaten



Kugelkoordinaten

- Einzig der $*$-Operator ist vom Koordinatensystem abhängig
- Eine Orthonormalbasis in Kugelkoordinaten ist gegeben durch die 1-Formen dr, $rd\theta$, $r \sin\theta d\phi$.
- Beispiel: Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten
  - Poission-Gleichung: $d * E = 4\pi\rho\Theta$
  - Hilfsgröße V mit $E = -dV$
  - Äquivalente Schreibweise: $d * dV = -4\pi\rho\Theta$

Kugelkoordinaten

- Einzig der $*$-Operator ist vom Koordinatensystem abhängig
- Eine Orthonormalbasis in Kugelkoordinaten ist gegeben durch die 1-Formen dr, $rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$.
- Beispiel: Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten
  - Poission-Gleichung: $d * E = 4\pi\rho\Theta$
  - Hilfsgröße V mit $E = -dV$
  - Äquivalente Schreibweise: $d * dV = -4\pi\rho\Theta$

Kugelkoordinaten

- Einzig der $*$-Operator ist vom Koordinatensystem abhängig
- Eine Orthonormalbasis in Kugelkoordinaten ist gegeben durch die 1-Formen dr, $rd\theta$, $r \sin\theta d\phi$.
- Beispiel: Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten
  - Poission-Gleichung: $d * E = 4\pi\rho\Theta$
  - Hilfsgröße V mit $E = -dV$
  - Äquivalente Schreibweise: $d * dV = -4\pi\rho\Theta$

Kugelkoordinaten

Erinnerung

- Laplace-Operator: $d * df = (\triangle f)dxdydz$
- In Kugelkoordinaten:

$$d * df = \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi})\right] drd\theta d\phi$$

Also lässt sich die Poisson-Gleichung $d * dV = -4\pi\rho\Theta$ in Kugelkoordinaten schreiben als:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi})\right] drd\theta d\phi = -4\pi\rho drd\theta d\phi$$

Kugelkoordinaten

Erinnerung

- Laplace-Operator: $d * df = (\triangle f)dxdydz$
- In Kugelkoordinaten:

$$d * df = \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi})\right] drd\theta d\phi$$

Also lässt sich die Poisson-Gleichung $d * dV = -4\pi\rho\Theta$ in Kugelkoordinaten schreiben als:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi})\right] drd\theta d\phi = -4\pi\rho drd\theta d\phi$$

Differentialform-Darstellung im Raumzeit-Ansatz

Raumzeit-Ansatz

- Raumzeit-Ansatz: Vierdimensionaler Raum statt Zeit als Parameter
- Hybrid-Notation:
  - d bezeichnet die vierdimensionale äußere Ableitung
  - d_3 bezeichnet die dreidimensionale äußere Ableitung
  - $dq = (dx, dy, dz)$, $\theta = (dxdy, dydz, dzdx)$, $\Theta = dxdydz$ wie bisher
- Für ein Skalar f gilt dann:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Raumzeit-Ansatz

- Raumzeit-Ansatz: Vierdimensionaler Raum statt Zeit als Parameter
- Hybrid-Notation:
  - d bezeichnet die vierdimensionale äußere Ableitung
  - d_3 bezeichnet die dreidimensionale äußere Ableitung
  - $dq = (dx, dy, dz)$, $\theta = (dxdy, dydz, dzdx)$, $\Theta = dxdydz$ wie bisher
- Für ein Skalar f gilt dann:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Raumzeit-Ansatz

- Raumzeit-Ansatz: Vierdimensionaler Raum statt Zeit als Parameter
- Hybrid-Notation:
  - d bezeichnet die vierdimensionale äußere Ableitung
  - d_3 bezeichnet die dreidimensionale äußere Ableitung
  - $dq = (dx, dy, dz)$, $\theta = (dxdy, dydz, dzdx)$, $\Theta = dxdydz$ wie bisher
- Für ein Skalar f gilt dann:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Homogene Gleichungen

- Die homogenen Gleichungen $d_3 B = 0$ und $\frac{\partial B}{\partial t} = -d_3 E$ lassen sich zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{B} \theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} dt\theta + dtd_3 \overrightarrow{E} dq = 0$$

- Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt) = 0$$

- Mit $F := \overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$dF = 0$$

Homogene Gleichungen

- Die homogenen Gleichungen $d_3 B = 0$ und $\frac{\partial B}{\partial t} = -d_3 E$ lassen sich zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{B} \theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} dt\theta + dt d_3 \overrightarrow{E} dq = 0$$

- Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt) = 0$$

- Mit $F := \overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$dF = 0$$

Homogene Gleichungen

- Die homogenen Gleichungen $d_3 B = 0$ und $\frac{\partial B}{\partial t} = -d_3 E$ lassen sich zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{B} \theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} dt\theta + dtd_3 \overrightarrow{E} dq = 0$$

- Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt) = 0$$

- Mit $F := \overrightarrow{B} \theta + \overrightarrow{E} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$dF = 0$$

- Behauptung: $d\overrightarrow{B}\theta = d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$

$$d\overrightarrow{B}\theta = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z}dzdxdy + \frac{\partial B_z}{\partial t}dtdxdy +$$

$$+\frac{\partial B_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial B_x}{\partial t}dtdydz + \frac{\partial B_y}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial B_y}{\partial t}dtdzdx =$$

$$= (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz + (\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial t})dt(dxdy + dydz + dzdx) =$$

$$= d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$$

- Behauptung: $d\overrightarrow{B}\theta = d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$

$$d\overrightarrow{B}\theta = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z}dzdxdy + \frac{\partial B_z}{\partial t}dtdxdy +$$

$$+\frac{\partial B_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial B_x}{\partial t}dtdydz + \frac{\partial B_y}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial B_y}{\partial t}dtdzdx =$$

$$= (\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz+(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial t})dt(dxdy+dydz+dzdx) =$$

$$= d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$$

- Behauptung: $d\overrightarrow{B}\theta = d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$

$$d\overrightarrow{B}\theta = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z}dzdxdy + \frac{\partial B_z}{\partial t}dtdxdy +$$

$$+\frac{\partial B_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial B_x}{\partial t}dtdydz + \frac{\partial B_y}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial B_y}{\partial t}dtdzdx =$$

$$= (\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz+(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial t})dt(dxdy+dydz+dzdx) =$$

$$= d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$$

- Behauptung: $d\overrightarrow{B}\theta = d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$

$$d\overrightarrow{B}\theta = d(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx) = \frac{\partial B_z}{\partial z}dzdxdy + \frac{\partial B_z}{\partial t}dtdxdy +$$

$$+\frac{\partial B_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial B_x}{\partial t}dtdydz + \frac{\partial B_y}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial B_y}{\partial t}dtdzdx =$$

$$= (\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z})dxdydz+(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial t})dt(dxdy+dydz+dzdx) =$$

$$= d_3\overrightarrow{B}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}dt\theta$$

Beweis der Vereinfachung

- Behauptung: $d\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$

$$d\overrightarrow{E}dqdt = d(E_x dxdt + E_y dydt + E_z dzdt) = \frac{\partial E_x}{\partial y}dydxdt + \frac{\partial E_x}{\partial z}dzdxdt +$$

$$+\frac{\partial E_y}{\partial x}dxdydt + \frac{\partial E_y}{\partial z}dzdydt + \frac{\partial E_z}{\partial x}dxdzdt + \frac{\partial E_z}{\partial y}dydzdt =$$

$$= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dxdydt + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dydzdt + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dzdxdt =$$

$$= d_3\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$$

Beweis der Vereinfachung

- Behauptung: $d\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$

$$d\overrightarrow{E}dqdt = d(E_x dxdt + E_y dydt + E_z dzdt) = \frac{\partial E_x}{\partial y}dydxdt + \frac{\partial E_x}{\partial z}dzdxdt +$$

$$+\frac{\partial E_y}{\partial x}dxdydt + \frac{\partial E_y}{\partial z}dzdydt + \frac{\partial E_z}{\partial x}dxdzdt + \frac{\partial E_z}{\partial y}dydzdt =$$

$$= (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})dxdydt + (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})dydzdt + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})dzdxdt =$$

$$= d_3\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$$

Beweis der Vereinfachung

- Behauptung: $d\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$

$$d\overrightarrow{E}dqdt = d(E_x dxdt + E_y dydt + E_z dzdt) = \frac{\partial E_x}{\partial y}dydxdt + \frac{\partial E_x}{\partial z}dzdxdt +$$

$$+\frac{\partial E_y}{\partial x}dxdydt + \frac{\partial E_y}{\partial z}dzdydt + \frac{\partial E_z}{\partial x}dxdzdt + \frac{\partial E_z}{\partial y}dydzdt =$$

$$= (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})dxdydt + (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})dydzdt + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})dzdxdt =$$

$$= d_3\overrightarrow{E}dqdt = dtd_3\overrightarrow{E}dq$$

Inhomogene Gleichungen

- Die inhomogenen Gleichungen $d_3 * E = 4\pi\rho\Theta$ und $\frac{\partial * E}{\partial t} = d_3 * B - 4\pi J$ lassen sich analog zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{E}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} dt\theta + dtd_3 \overrightarrow{B} dq = -4\pi J dt + 4\pi\rho\Theta$$

- und vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt) = 4\pi(\rho\Theta - Jdt)$$

- Da $\star F = \overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$d\star F = 4\pi j$$

mit der Ladungs-3-Form $j := \rho\Theta - Jdt$

Inhomogene Gleichungen

- Die inhomogenen Gleichungen $d_3 * E = 4\pi\rho\Theta$ und $\frac{\partial * E}{\partial t} = d_3 * B - 4\pi J$ lassen sich analog zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{E}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} dt\theta + dtd_3 \overrightarrow{B} dq = -4\pi Jdt + 4\pi\rho\Theta$$

- und vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt) = 4\pi(\rho\Theta - Jdt)$$

- Da $\bigstar F = \overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$d\bigstar F = 4\pi j$$

mit der Ladungs-3-Form $j := \rho\Theta - Jdt$

Inhomogene Gleichungen

- Die inhomogenen Gleichungen $d_3 * E = 4\pi\rho\Theta$ und $\frac{\partial * E}{\partial t} = d_3 * B - 4\pi J$ lassen sich analog zusammenfassen zu:

$$d_3 \overrightarrow{E}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} dt\theta + dtd_3 \overrightarrow{B} dq = -4\pi Jdt + 4\pi\rho\Theta$$

- und vereinfachen zu:

$$d(\overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt) = 4\pi(\rho\Theta - Jdt)$$

- Da $\bigstar F = \overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt$ können wir dafür schreiben:

$$d\bigstar F = 4\pi j$$

mit der Ladungs-3-Form $j := \rho\Theta - Jdt$

Inhomogene Gleichungen

Erinnerung

Im 4-dim. VR mit Orthonormalbasis dx^1, dx^2, dx^3, dt mit zyklischer Ordnung (i,j,k) gilt:

$$\star dx^i dt = dx^j dx^k$$

$$\star dx^j dx^k = -dx^i dt$$

$$\star F = \star(\overrightarrow{B}\theta + \overrightarrow{E} dqdt) =$$

$$= \star(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx + E_x dxdt + E_y dydt + E_z dzdt) =$$

$$= -B_z dzdt - B_x dxdt - B_y dydt + E_x dzdy + E_y dxdz + E_z dxdy = \overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt$$

Inhomogene Gleichungen

Erinnerung

Im 4-dim. VR mit Orthonormalbasis dx^1, dx^2, dx^3, dt mit zyklischer Ordnung (i,j,k) gilt:

$$\star dx^i dt = dx^j dx^k$$

$$\star dx^j dx^k = -dx^i dt$$

$$\star F = \star(\overrightarrow{B}\theta + \overrightarrow{E} dqdt) =$$

$$= \star(B_z dxdy + B_x dydz + B_y dzdx + E_x dxdt + E_y dydt + E_z dzdt) =$$

$$= -B_z dzdt - B_x dxdt - B_y dydt + E_x dzdy + E_y dxdz + E_z dxdy = \overrightarrow{E}\theta - \overrightarrow{B} dqdt$$

Maxwell-Gleichungen im Raumzeit-Ansatz

- Die Maxwellschen Gleichungen für den Raumzeitansatz sind also:

$$dF = 0$$

$$d\bigstar F = 4\pi j$$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!