Differentialformen in Natur und Technik

Anwendungen in der Differentialgeometrie

Sarah Schröder

20.01.2009

Inhaltsverzeichnis

Flächen

Wiederholung

Σ sei eine glatte Fläche in E^3. Zusätzlich gilt:

- $\mathbf{e}$ sei ein bewegliches Koordinatensystem für alle Punkte x auf Σ
- e_3 ist die Normale zur Fläche Σ
- e_1 und e_2 bilden die Tangentialebene in jedem Punkt

Weiter gilt:

- Solange x sich nur auf der Fläche Σ bewegt, liegt dx in der Tangentialebene.
- $\mathrm{dx} = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$
  Es ist ersichtlich, dass $\sigma_1 \sigma_2$ das Flächenelement von Σ ist.
- $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \varpi & -\omega_1 \\ -\varpi & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}$

Flächen

Wiederholung

Es gelten folgende Strukturgleichungen:

- $dx = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$
- $de_1 = \varpi e_2 - \omega_1 e_3$
- $de_2 = -\varpi e_1 - \omega_2 e_3$
- $de_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$

$\Rightarrow dx \times dx = (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2) \times (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2) = \sigma_1^2 (e_1 \times e_1) + \sigma_2^2 (e_2 \times e_2) + \sigma_1 \sigma_2 (e_1 \times e_2) + \sigma_2 \sigma_1 (e_2 \times e_1)$

Sei $\sigma_1^2 = 0$ (und $e_1 \times e_1$), etc.

Weiter gilt: $\sigma_2 \sigma_1 (e_2 \times e_1) = (-\sigma_1 \sigma_2)(-e_1 \times e_2) = (\sigma_1 \sigma_2) e_3$
$\Rightarrow dx \times dx = 2(\sigma_1 \sigma_2) e_3$ (Erhält Vektorflächenelement $(\sigma_1 \sigma_2) e_3$)

Flächen

Wiederholung

Weiter sei festzuhalten:

- Wenn x sich über Σ bewegt, bewegt sich e_3 über eine Region auf der Einheitssphäre S^2(sphärisches Abbild von Σ)
- Die Gleichung $de_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ spielt die gleiche Rolle für S^2, wie $dx = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$ für Σ
- $\omega_1 \omega_2$ ist somit das Flächenelement von S^2
- Da es nur eine lin. unabhängige 2-Form gibt folgt: $\omega_1 \omega_2 = K \sigma_1 \sigma_2$, wobei man das Skalar K als Gaußkrümmung bezeichnet.
- Entsprechend ist $\sigma_1 \omega_2$ - $\sigma_2 \omega_1$ eine 2-Form auf Σ und es gilt: $\sigma_1 \omega_2$ - $\sigma_2 \omega_1 = 2H \sigma_1 \sigma_2$, wobei das Skalar H die Durchschnittskrümmung von Σ ist.
- Entsprechend erhält man: $dx \times de_3 = 2H(\sigma_1 \sigma_2)e_3, \quad de_3 \times de_3 = 2K(\sigma_1 \sigma_2)e_3$

Flächen

Fortsetzung

Σ sei eine geschlossene Fläche in E^3.

e_3 sei die äußere Normale zu Σ.

$x \longrightarrow e_3$ ist die Normalenabbildung von Σ zur Einheitssphäre S^2

Wie x über Σ variert, so variert e_3 über S^2

Die geringste Anzahl von Elementen im Urbild eines Punktes auf der Einheitssphäre bezeichnet man als Grad.

Das Flächenelement der Normalenabbildung ist $\omega_1\omega_2 = K\sigma_1\sigma_2$.
(Da $de_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$)

Deshalb ist $\int_\Sigma K\sigma_1\sigma_2 = 4\pi n$, wobei n der Grad ist und der Faktor 4π ist der Flächeninhalt der Einheitssphäre.

Flächen

Fortsetzung

Für den Fall, dass Σ eine geschlossene **konvexe** Fläche ist, verhält sich e_3 in S^2 genauso, wie x in Σ.

In diesem Fall ist $\int_\Sigma \mathrm{K}\sigma_1\sigma_2 = 4\pi$

Betrachten nur noch geschlossene konvexe Flächen.

2 wichtige gleichbleibende Größen sind:

- Die gesamte Fläche $\mathrm{A} = \int_\Sigma \sigma_1\sigma_2$
- Die integrierte Durchschnittskrümmung $\mathrm{M} = \int_\Sigma \mathrm{H}\sigma_1\sigma_2$

Flächen

Fortsetzung

Sei Σ wie gehabt und a eine pos. feste Zahl.

Wir bilden eine Fläche Σ' parallel zu Σ mit Abstand a. (jeden Pkt. x um a in Normalenrichtung verschieben)

Die Punkte der Fläche Σ' sind somit $y{=}x{+}ae_3$ (e_3 kennzeichnet immer die Normale zu x).

$\Rightarrow dy = dx + ade_3 = (\sigma_1{+}a\omega_1)e_1{+}(\sigma_2{+}a\omega_2)e_2$

Die Normale zur Fläche Σ', welche alle y enthält, ist wieder e_3. e_1 und e_2 können somit als eine Basis des Tangentialraumes in y angesehen werden.

$\Rightarrow dy = \tau_1 e_1{+}\tau_2 e_2 \qquad$ mit $\tau_1{=}\sigma_1{+}a\omega_1$, $\tau_2{=}\sigma_2{+}a\omega_2$

Flächen

Fortsetzung

Das Flächenelement von $\Sigma^{'}$ ist also:
$\tau_1\tau_2 = (\sigma_1 + \mathrm{a}\omega_1)\cdot(\sigma_2 + \mathrm{a}\omega_2) = \sigma_1\sigma_2 + \mathrm{a}(\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1) + a^2\omega_1\omega_2 = (1 + 2\mathrm{aH} + a^2\mathrm{K})\sigma_1\sigma_2$

Somit ist die gesamte Fläche:
$A^{'} = \int\tau_1\tau_2 = \int(1 + 2\mathrm{aH} + a^2\mathrm{K})\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{A} + 2\mathrm{aM} + 4\pi a^2$

Beim Integrieren über a bekommt man dann einen Zusammenhang zwischen V und $V^{'}$, welche die Flächen Σ und $\Sigma^{'}$ enthalten:
$V^{'} = \mathrm{V} + \mathrm{aM} + a^2\mathrm{M} + \frac{4}{3}\pi a^3$

Man kann somit folgende Zusammenhänge festhalten:

- $M^{'} = \mathrm{M} + 4\pi\mathrm{a}$
- $H^{'} = \frac{H + aK}{1 + 2aH + a^2K}$
- $K^{'} = \frac{K}{1 + 2aH + a^2K}$

Flächen

Fortsetzung

Führen Hilfsfunktion auf Σ ein, definiert durch: p=x$\cdot e_3$

Es ist günstig Σ im Raum fest zu machen, so dass der Ursprung in Σ liegt. Dann ist p>0 in jedem Punkt von Σ.

Wollen nun verschiedene Gleichungen erhalten:

Sei λ eine 1-Form auf Σ. Dann ist $\int_\Sigma d\lambda = 0$

Für $\partial\Sigma = 0$ und die Anwendung des Stokestheorems folgt:

$\int_\Sigma d\lambda = \int_{\partial\Sigma} \lambda = 0$

Flächen

Fortsetzung

Betrachten wir die 1-Form $\alpha = e_3 (x \times dx)$
$\Rightarrow d\alpha = de_3\ (x \times dx) + e_3\ (dx \times dx)$

Es ist:

- $de_3\ (x \times dx) = -x(de_3 \times dx) = -x(dx \times de_3) = -x(2H\sigma_1\sigma_2 e_3)$
  $= -2pH\sigma_1\sigma_2$
- $e_3\ (dx \times dx) = e_3\ (2\sigma_1\sigma_2 e_3) = 2\sigma_1\sigma_2$

$\Rightarrow d\alpha = 2[\sigma_1\sigma_2 - pH\sigma_1\sigma_2]$

Da das Integral von $d\alpha = 0$ ist
$\Rightarrow A = \int_\Sigma \sigma_1\sigma_2 = \int_\Sigma pH\sigma_1\sigma_2$

Sei nun $\beta = x\ (e_3 \times de_3) \Rightarrow d\beta = 2[pK\sigma_1\sigma_2 - H\sigma_1\sigma_2]$
$\Rightarrow M = \int_\Sigma H\sigma_1\sigma_2 = \int_\Sigma pK\sigma_1\sigma_2$

Flächen

Fortsetzung

Jetzt ist es günstig, nach dem Finden der Integrale von H und K, das Integral $\int_\Sigma p\sigma_1\sigma_2$ zu suchen.

Wir starten dafür mit der Vektorfläche:

$$(\sigma_1\sigma_2)e_3 = \frac{1}{2}dx \times dx = (dydz, dzdx, dxdy)$$
$$\Rightarrow p\sigma_1\sigma_2 = (xe_3)(\sigma_1\sigma_2) = xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Sei R ein Gebiet im E^3 begrenzt durch die geschlossene konvexe Fläche und sei V das Volumen des Gebietes R.

$$\Rightarrow \int_\Sigma p\sigma_1\sigma_2 = \int_{\Sigma=\partial R}(xdydz + ydzdx + zdxdy) = \int_R d(xdydz + \dots) = 3\int_R dxdydz = 3V$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\int_\Sigma p\sigma_1\sigma_2$$

Flächen

Fortsetzung

Nun wollen wir noch folgendes Theorem beweisen:

Theorem:
Sei Σ eine geschlossene konvexe Fläche mit konstanter Gaußkrümmung K. Dann ist Σ ein Sphäre.

Beweis:
Um dies zu beweisen, müssen wir folgende Zusammenhänge wdh.:

- $\mathrm{dx} = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$
- $\mathrm{d}e_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$
- $\omega_1 = \mathrm{p}\sigma_1 + \mathrm{q}\sigma_2$
- $\omega_2 = \mathrm{q}\sigma_1 + \mathrm{r}\sigma_2$
- $\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{p}+\mathrm{r})$
- $\mathrm{K} = \mathrm{pr}\text{-}q^2$

Da Σ konvex ist $\Rightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ ist positiv definit, p>0, r>0, K>0.

Flächen

Fortsetzung

Daraus ergibt sich folgende Ungleichung:

K = pr-$q^2 \leq$ pr $\leq [\frac{1}{2}(p+r)]^2 = H^2$

Es ist also möglich, dass K=H^2, jedoch nur wenn gilt:
q=0 $\wedge$ p=r=H, was beinhaltet, dass

- ω_1=Hσ_1
- ω_2=Hσ_2
- de_3=Hdx

Aber: $\int\int \sigma_1\sigma_2 = \int\int$pH$\sigma_1\sigma_2 \geq \int\int$p$\sqrt{K}\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{K}}\int\int$pK$\sigma_1\sigma_2 =$
$\frac{1}{\sqrt{K}}\int\int$H$\sigma_1\sigma_2 \geq \frac{1}{\sqrt{K}}\int\int\sqrt{K}\sigma_1\sigma_2 = \int\int\sigma_1\sigma_2$
(alle Integrale gehen über Σ)

Flächen

Fortsetzung

Da das Anfangs- und das Endintegral dieser Kette von Ungleichungen gleich ist $\Rightarrow$ H $= \sqrt{K}$

Daher wissen wir, dass auch H konstant ist. (K konstant war vorausgesetzt.)

Wissen: $\mathrm{d}e_3 = \mathrm{Hdx}$
$\Rightarrow \mathrm{Hx} = e_3 + \mathrm{Hc}$, wobei c ein konstanter Vektor ist.

Somit gilt: $|x - c| = (\frac{1}{H})|e_3| = \frac{1}{H}$

$\Rightarrow \Sigma$ ist eine Sphäre!

Hyperflächen
Grundlagen

Definition:
Eine Hyperfläche ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M eingebettet in E^{n+1}.

Der Punkt x bewegt sich auf M.

n sei die Einheitsnormale zu jedem Punkt x auf M.

Die Abb. x$\rightarrow$n sei eine glatte Abb. von M nach S^n.

Der Tangentialraum an x ist ein n-dim. euklidischer Raum. Wir wählen $e_1,\ldots,e_n$ als eine Orthonormalbasis dieses Raumes.
Die Vektoren $e_1,\ldots,e_n$,n bilden somit eine Orthonormalbasis von E^{n+1}.

Da dx im Tangentialraum liegt gilt:
$dx = \sigma_1 e_1 + \ldots + \sigma_n e_n$,

Hyperflächen

Grundlagen

Wir wissen, dass

- $e_i \cdot e_k = \delta_{ik}$
- $e_i \cdot \mathrm{n} = 0$
- $\mathrm{n} \cdot \mathrm{n} = 1$

$\Rightarrow$ (d angewandt)

- $\mathrm{d}e_i \cdot e_k + e_i \cdot \mathrm{d}e_k = 0$
- $\mathrm{d}e_i \cdot \mathrm{n} + e_i \cdot \mathrm{dn} = 0$
- $\mathrm{n} \cdot \mathrm{dn} = 0$

$\Rightarrow$

- $\mathrm{d}e_i = \sum \omega_{ij} e_j \text{-} \omega_i \mathrm{n}$
- $\mathrm{dn} = \sum \omega_i e_i$

ω_{ij}, ω_i sind 1-Formen auf M und $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$

Hyperflächen

Grundlagen

Wir schreiben das ganze in Matrixform. Dazu setzen wir:

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

$$\Omega = \|\omega_{ij}\|, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$\mathrm{dx} = \sigma \mathrm{e}$$

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & -{}^t\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$$

$$\Omega + {}^t\Omega = 0$$

Hyperflächen

Grundlagen

Wenden nun die äußere Ableitung an. Dann folgt:

- $0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = (\mathrm{d}\sigma)\mathrm{e}$ - $\sigma(\mathrm{de}) = (\mathrm{d}\sigma)\mathrm{e}$ - $\sigma(\Omega\mathrm{e}$-${}^t\omega\mathrm{n}) =$ $((\mathrm{d}\sigma)$-$\sigma\Omega)\mathrm{e} + \sigma{}^t\omega\mathrm{n}$

  $\Rightarrow \mathrm{d}\sigma{=}\sigma\Omega,\ \sigma{}^t\omega{=}0$

- $0 = \mathrm{d}[\mathrm{d}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} d\Omega & -d{}^t\omega \\ d\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \Omega & -{}^t\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} d\Omega & -d{}^t\omega \\ d\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \Omega & -{}^t\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} d\Omega - \Omega^2 +^t \omega\omega & -{}^t(d\omega) + \Omega{}^t\omega \\ d\omega - \omega\Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \mathrm{d}\Omega$-$\Omega^2 +{}^t\omega\omega = 0,\ \mathrm{d}\omega = \omega\Omega$

Hyperflächen

Grundlagen

Wir definieren eine schiefsymmetrische Matrix mit 2-Form:
$\Theta = \|\theta_{ij}\| = \mathrm{d}\Omega\text{-}\Omega^2$.

Wir können folgende Resultate zusammenfassen:

- $\mathrm{d}\sigma \qquad = \sigma\Omega$
- $\Omega + {}^t\Omega = 0$
- $\sigma {}^t\omega=0$
- $\mathrm{d}\omega = \omega\Omega$
- $\Theta + {}^t\omega\omega = 0$

Hyperflächen
Grundlagen

In Matrixschreibweise geschrieben:

- $\mathrm{d}\sigma_j = \sum \sigma_i \omega_{ij}$
- $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$
- $\sum \sigma_i \omega_i = 0$
- $\mathrm{d}\omega_j = \sum \omega_i \omega_{ij}$
- $\Theta_{ij} + \omega_i \omega_j = 0$

Die σ_i bilden eine Basis für 1-Formen auf M
$\Rightarrow \omega_i = \sum b_{ij} \sigma_j$

Da $\sum \sigma_i \omega_i = 0$ muss b_{ij} symmetrisch sein, also $b_{ij} = b_{ji}$.

Hyperflächen
Grundlagen

Die Durchschnittskrümmung H und die Gaußkrümmung K sind definiert als:

$\mathrm{H} = \frac{1}{n}\sum b_{ii}$, $\mathrm{K} = |b_{ij}|$

Da $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ das n-dim. Volumenelement auf M ist, und $\omega_1 \cdots \omega_n$ das entsprechende Element für S^n, steht K für das Verhältnis zwischen dem Volumen der Fläche des sphärischen Bilds und dem der Fläche von M, infolge:

$$\omega_1 \cdots \omega_n = (\sum b_{1j}\sigma_j) \cdots (\sum b_{nj}\sigma_j) = |b_{ij}|\sigma_1 \cdots \sigma_n = \mathrm{K}\sigma_1 \cdots \sigma_n$$

Hyperflächen

Sei P = P(s) eine Kurve auf M parametrisiert durch ihre Bogenlänge s, so dass
$t = t(s) = \frac{dP}{ds}$ der Tangentialeinheitsvektor ist.

Zu jeder einzelnen Verschiebung dx des Ortsvektors x gibt es eine entsprechende Verschiebung dn der Einheitsnormale n.

dx und dn liegen im Tangentialraum an x, so dass wir dx$\longrightarrow$dn als lineare Transformation A des Tangentialraums betrachten können.

Hyperflächen

Genauer: Sei v irgendein Tangentialvektor an x.

Wählen eine Kurve x=x(t) durch x, so dass $\frac{dx}{dt}|_0 = v$.

Wir beobachten die Normale n=n(t) während x die Kurve durchläuft.

$\Rightarrow \frac{dn}{dt}|_0 = Av$ ist unsere Definition von A.
Dies ist ganz unabhängig von der Wahl der Kurve x(t), solange sie die vorgegebene Tangente v für t=0 hat.

Durch weitere Berechnungen kann man für die Matrix A verschiedene Eigenschaften folgern. Unter anderem gilt:

Die Matrixdarstellung von A im Bezug zur Basis **e** ist $\|b_{ij}\|$.

Hyperflächen

Da die Matrix b_{ij} symmetrisch ist, ist die Leartransformation A auf dem Eukl. n-dim. Tangentialraum an x **selbstadjungiert**, was bedeutet:

Für jedes Paar von Tangentialvektoren v,w ist $(Av) \cdot w = v \cdot (Aw)$

Unsere Definition von A hängt nur von der Hyperfläche M und deren Einbettung in E^{n+1} ab, **nicht** von der Wahl des Koordinatensystems e.

Es gilt:

- $H = \frac{1}{n}\mathrm{trace}(A)$
- $K = |A|$

Hyperflächen

Da A selbstadjungiert ist, sind alle Eigenwerte reell.

Diese werden **Hauptkrümmungen** genannt.

Die zugehörigen Eigenvektoren definieren im allgemeinen n Richtungsfelder auf M, welche **Hauptrichtungen** genannt werden.

Deren Integralkurven werden als **Krümmungslinien** bezeichnet.

Hyperflächen

Wir betrachten nun den Spezialfall, in dem unsere Hyperfläche M gegeben ist in der Form

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}(x^1,\ldots,x^n),$$

wobei $x^1,\ldots,x^n$,u den Raum aufspannen.

Es ist günstig $p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $r_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ zu setzen.

x$=(x^1,x^2,\ldots,x^n,u)$ ist unser Ortsvektor.
$\Rightarrow$ dx$=(dx^1,dx^2,\ldots,dx^n,\mathrm{du})=(\mathrm{d}x^1,\ldots,\mathrm{d}x^n,\sum p_i dx^i)= \sum t_i \mathrm{d}x^i$, wobei $t_i=(\delta_{i1},\ldots,\delta_{in},p_i)$.

Die Vektoren $t_1,\ldots,t_n$ sind Tangentialvektoren und formen offenbar eine lin. Basis der Tangentialhyperfläche. Allgemein jedoch **keine** Orthonormalbasis.

Hyperflächen

Der Vektor $w=(-p_1,\ldots,-p_n,1)$

erfüllt die Gleichung: $w\cdot t_i=0$,

daher ist es ein Normalvektor (mit positiver Komponente in u-Richtung).

Die Einheitsnormale n ist gegeben durch:

$$w=\omega n, \text{ wobei } \omega^2=w\cdot w=1+\sum p_i^2 \text{ ist.}$$

Wir bemerken, dass $\omega d\omega=\sum p_i dp_i=\sum p_i r_{ij} dx^i$.

Hyperflächen

Wir wollen jetzt die Matrixdarstellung der grundlegenden linearen Transformation A bestimmen in Bezug zur Basis $t_1,\ldots,t_n$.

Diese Matrix, die A repräsentiert, ist im allgemeinen nicht symmetrisch, weil die (t_i) keine Orthonormalbasis bilden.

Die Spur und die Determinante sind die gleichen wie von A, da jede Matrixdarstellung von A diese Eigenschaften enthält und nicht verändert.

Angenommen die Matrix, die wir suchen sei $\|a_{ij}\|$, das bedeutet, dass

$$\mathrm{A}t_i = \sum a_{ij} t_j .$$

Hyperflächen

Sei v irgendein Tangentialvektor. Durch diese Tatsache und dadurch, dass A selbstadjungiert ist

$\Rightarrow$ $(\mathrm{Av})\cdot t_i = (\mathrm{A}t_i)\cdot \mathrm{v} = \sum a_{ij}(t_j \cdot \mathrm{v})$

Nehmen wir nun Bezug auf die Defintion von A,
A: dx$\rightarrow$dn, es folgt, dass

$$(\mathrm{dn})\cdot t_i = \sum a_{ij}(\mathrm{dx}\cdot t_j)$$

Hyperflächen

Wir bekommen folgende Gleichungen:

$$\mathrm{dw}{=}\mathrm{d}\omega\mathrm{n}{+}\omega\mathrm{dn}, \qquad \mathrm{dw}\cdot t_i{=}\omega(\mathrm{dn})\cdot t_i,\ (\text{da } \mathrm{n}\cdot t_i{=}0)$$

Jedoch gilt:

$$\mathrm{dw}\cdot t_i = (\text{-}\mathrm{d}p_1,\ldots,\text{-}\mathrm{d}p_n,0)\cdot(\delta_{i1},\ldots,\delta_{in},p_i) = \text{-}\mathrm{d}p_i = \text{-}\sum r_{ij}\mathrm{d}x^j.$$

So bekommen wir folgende Gleichung:

$$\mathrm{dn}\cdot t_i{=}\text{-}\frac{1}{\omega}\sum r_{ij}\mathrm{d}x^j.$$

Andererseits ist: $\mathrm{dx}\cdot t_j = (\mathrm{d}x^1,\ldots,\mathrm{d}x_n,\mathrm{du})\cdot(\delta_{j1},\ldots,\delta_{jn},p_j) = \mathrm{d}x^j{+}p_j\mathrm{du}$
$= \mathrm{d}x^j{+}p_j\sum p_k\mathrm{d}x^k = \sum_k(\delta_{jk}{+}p_jp_k)\mathrm{d}x^k$

Hyperflächen

$$\Rightarrow \sum a_{ij}(\delta_{jk}+p_j p_k \mathrm{d}x^k) = -\frac{1}{\omega} \sum r_{ik}\mathrm{d}x^k$$

$$\Rightarrow \sum a_{ij}(\delta_{jk}+p_j p_k) = -\frac{1}{\omega} r_{ik}.$$

Setzen nun:

$$\mathrm{R} = \|r_{ik}\|, \quad \mathrm{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}=\|a_{ij}\|.$$

Dies können wir schreiben als:

$$\mathrm{A}(I+{}^t\mathrm{pp})=-\frac{1}{\omega}\mathrm{R}, \quad \mathrm{A}=-\frac{1}{\omega}\mathrm{R}(I+{}^t\mathrm{pp})^{-1}.$$

Hyperflächen

Da

$$^t\text{pp} = \sum p_i^2 = \omega^2\text{-}1$$

können wir sehen, dass

$$(I + {}^t\text{pp})(I\text{-}(\frac{1}{\omega^2})\,{}^t\text{pp}) = I + {}^t\text{pp-}(\frac{1}{\omega^2})\,{}^t\text{pp-}\frac{\omega^2 - 1}{\omega^2}\,{}^t\text{pp} = I,$$

deshalb ist

$$(I + {}^t\text{pp})^{-1} = I\text{-}(\frac{1}{\omega^2})\,{}^t\text{pp},$$

$$\text{A} = \text{-}\frac{1}{\omega}\text{R}(\text{I-}((\frac{1}{\omega^2})\,{}^t\text{pp})$$

Hyperflächen

Die Durchschnittskrümmung H wird durch die Spur gefunden:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{n}\mathrm{tr(A)} = -\frac{1}{n\omega}\mathrm{tr[R}-\frac{1}{\omega^2}\mathrm{R}^t\mathrm{pp]} = -\frac{1}{n\omega}[\sum r_{ii}-\sum(\frac{1}{\omega^2})p_i r_{ij} p_j] = -\frac{1}{n\omega}[\Delta\mathrm{u}-\sum\frac{1}{\omega^2}p_i r_{ij} p_j],$$

wobei Δ der Laplaceoperator ist.

Die Gaußkrümmung K wird über die Determinante gefunden:

$$\mathrm{K} = |A| = \frac{(-1)^n}{\omega^n}|R||I +^t pp|^{-1}.$$

Durch eine kurze Berechnung folgt:

$$|I +^t pp|^{-1} = \omega^2, \text{ so dass}$$

$$\mathrm{K} = \frac{(-1)^n}{\omega^{n+2}}|R|.$$

Hyperflächen

Bsp.: Spezialfall für n=2

Für diesen Fall benutzt man die Mongenotation:
Es sind:

$$\mathrm{p}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathrm{q}=\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mathrm{r}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathrm{s}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \mathrm{t}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Es folgt:

$$\omega^2 = 1+p^2+q^2,$$

So folgt für H:

$$\mathrm{H} = \frac{-1}{2\omega^3}[\omega^2(\mathrm{r}+\mathrm{t})\text{-}(p^2\mathrm{r}+2\mathrm{pqs}+q^2\mathrm{t})] = \frac{-1}{2\omega^3}[(1+p^2+q^2)(\mathrm{r}+\mathrm{t})\text{-}(p^2\mathrm{r}+2\mathrm{pqs}+q^2\mathrm{t})] = \frac{-1}{2\omega^3}[(1+q^2)\mathrm{r}\text{-}2\mathrm{pqs}+(1+p^2)\mathrm{t}],$$

und für K:

$$\mathrm{K} = \frac{(rt-s^2)}{\omega^4}$$

ENDE

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT!