Ein Blick über den Tellerrand ... mit `FreeFem++`

Eine Einführung und etwas Theorie

Steffen Weißer

Universität des Saarlandes

30. Oktober 2015

Gliederung

Ablauf

1. Erhalt der Themen
2. Einarbeitung in das Thema
3. Beispiele mit `FreeFem++` und evtl. mit `C` rechnen
4. Präsentation mit LaTeX erstellen
5. 1-2 Wochen vor Vortrag Besprechung
6. Vortrag und anschließend werden Folien online gestellt
7. Abgabe *aller* Unterlagen bis spätestens Ende des Semesters

Lernziele

Wir vertiefen und festigten euer Wissen zu PDEs.

Lernziele

Wir vertiefen und festigten euer Wissen zu PDEs.

Ihr . . .

- seid in der Lage euch selbstständig in ein Thema einzuarbeiten
- beherrscht den Umgang mit LaTeX
- könnt numerische Beispiele mit `FreeFem++` realisieren
- könnt Vorträge kritisch beurteilen und selbst welche halten
- seid in der Lage fachliche Fragen zu stellen

Vortrag

Vortragender:

- Theorie zum Vortragsthema
- Präsentation von numerischen Beispielen
- Erläuterungen zur `FreeFem++` Syntax
- Diskussion

Vortrag

Vortragender:

- Theorie zum Vortragsthema
- Präsentation von numerischen Beispielen
- Erläuterungen zur `FreeFem++` Syntax
- Diskussion

Zuhörer:

- Lernen was zum Thema
- Bekommen Aufgaben zugeteilt:
  - Fachexperten (stellen fachliche Fragen)
  - Objektive Beobachter (geben Feedback zum Vortrag)
  - ...

Was ist eine PDE?

Sei u eine unbekannte Funktion in d unabhängigen Variablen $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$. So bezeichnet mit $p_1, \ldots, p_d \in \mathbb{N}$

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \ldots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d} u}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}\right) = 0$$

eine allgemeine partielle Differentialglichung (PDE).

1. Wir sagen die PDE ist *von der Ordnung* q, falls für die maximal auftretende Ableitung gilt $p_1 + \cdots + p_d = q$.
2. Hängt die PDE linear von u ab, so heißt die PDE *linear*.
3. Enthält die PDE einen Term, der unabhängig von u ist, so heißt sie *inhomogen*, sonst *homogen*.

Beispiele 1/2

Sei $u = u(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bzw. $u = u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} \quad \text{und} \quad d \in \mathbb{N}$$

Poisson-Gleichung:

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x)$$

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x)$$

Beispiele 2/2

Lineare Elastizität (Lamé-Gleichungen):
Sei für eine vektorwertige Funktion $u = (u_1, u_2, u_3)^\top : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

Die *Lamé-Gleichungen* lauten

$$-\mu \Delta u_i(x) - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} u(x) = f_i(x) \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

wobei λ und μ die sogenannten Lamé-Konstanten sind.

Typeinteilung bei PDEs 2ter Ordnung

Die allg. *lineare* PDE in zwei Variablen lautet

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial u}{\partial x_2} + fu = g$$

mit $a = a(x), \dots, g = g(x)$.

Die Gleichung heißt ...

1. *elliptisch*, falls $\triangle = b^2 - ac < 0$,
2. *hyperbolisch*, falls $\triangle = b^2 - ac > 0$,
3. *parabolisch*, falls $\triangle = b^2 - ac = 0$ und

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2.$$

Anfangs- und Randwertprobleme

Wir betrachten die PDEs stets auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ und bei zeitabhängigen Problemen auf dem Raum-Zeit-Zylinder $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Sei $\Gamma = \partial\Omega$ und n der äußere Normalenvektor an Ω. Zusätzlich zur PDE werden je nach Typ *Randdaten*

- $u = g_D$ auf Γ (Dirichlet-Randbedingung)
- $n \cdot \nabla u = g_N$ auf Γ (Neumann-Randbedingung)
- $u + \kappa n \cdot \nabla u = g_R$ auf Γ (Robin-Randbedingung)

und/oder *Anfangsdaten*

- $u = u_0$ für $t = 0$ in Ω
- $\frac{\partial u}{\partial t} = u_{t_0}$ für $t = 0$ in Ω

vorgegeben.

Klassische Lösung

Betrachten wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in 1D. Sei $\Omega = (0,1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = f(x) \quad & \text{für } x \in \Omega = (0,1), \\ u(x) = 0 \qquad & \text{für } x \in \Gamma = \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Im *klassischen Sinn* ist eine Funktion u gesucht, die (1) punktweise erfüllt und für die gilt

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Klassische Lösung

Betrachten wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in 1D. Sei $\Omega = (0,1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (0,1), \\ u(x) &= 0 \qquad\; \text{für } x \in \Gamma = \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Im *klassischen Sinn* ist eine Funktion u gesucht, die (1) punktweise erfüllt und für die gilt

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Sehr starke Voraussetzung an u!!

Klassische Lösung

Betrachten wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in 1D. Sei $\Omega = (0,1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (0,1), \\ u(x) &= 0 \qquad\quad \text{für } x \in \Gamma = \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Im *klassischen Sinn* ist eine Funktion u gesucht, die (1) punktweise erfüllt und für die gilt

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Sehr starke Voraussetzung an u!!
Überlegung: u erfüllt für alle $v \in C^1(\Omega)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$0 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f \right) v \, dx$$

Klassische Lösung

Betrachten wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in 1D. Sei $\Omega = (0,1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (0,1), \\ u(x) &= 0 \qquad\quad \text{für } x \in \Gamma = \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Im *klassischen Sinn* ist eine Funktion u gesucht, die (1) punktweise erfüllt und für die gilt

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Sehr starke Voraussetzung an u!!
Überlegung: u erfüllt für alle $v \in C^1(\Omega)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$0 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f \right) v \, dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - fv \right) dx.$$

Etwas Funktionalanalysis

Banach-Raum:
Ein normierter Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|_V$ heißt *Banach-Raum*, falls er *vollständig* bzgl. $\|\cdot\|_V$ ist.

Vollständig bedeutet hierbei, dass jede *Cauchy-Folge* in V konvergiert.

Hilbert-Raum:
Ist V ein Banach-Raum, dessen Norm duch ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$ *induziert* wird, d.h. $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$, so heißt V *Hilbert-Raum*.

Funktionale und Dualraum

Sei V ein Banach-Raum. Eine Abbildung

$$F : V \to \mathbb{R}$$

heißt *Funktional*. Es wird *linear* genannt, falls

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ v, w \in V$$

und *beschränkt* falls

$$|F(v)| \leq c\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Der Raum $V' = \{F : V \to \mathbb{R} \,|\, F \text{ linear und beschränkt}\}$ heißt *Dualraum von V*. Er ist ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|F\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V}.$$

Bilinearform

Eine Abbildung

$$a : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt *Bilinearform*, falls sie in beiden Argumenten *linear* ist.

Sie heißt *beschränkt*, falls eine Konstante c_1 existiert mit

$$|a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

und *koerziv*, falls eine Konstante c_2 existiert mit

$$|a(v, v)| \geq c_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

und *symmetrisch*, falls

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V.$$

Variationsformulierung

Lemma (Lax-Milgram)

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive Bilinearform und $F : V \to \mathbb{R}$ ein lineares beschränktes Funktional. Dann hat die *Variationsformulierung*

$$\text{Finde } u \in V : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

eine eindeutige Lösung und es gilt

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_2} \|F\|_{V'}.$$

Schwache Ableitung

Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)^\top \in \mathbb{N}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein Multiindex und

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{mit} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d.$$

Für $u : \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt folgt mit partieller Differentiation

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u\, \phi\, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Schwache Ableitung

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^\top \in \mathbb{N}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein Multiindex und

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{mit} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Für $u : \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt folgt mit partieller Differentiation

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u\, \phi\, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ein $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ besitzt eine α-te *schwache Ableitung* wenn $u_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha\, \phi\, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

L_2- und Sobolev-Räume

Der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen

$$L_2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{L_2(\Omega)} < \infty\}$$

ist ein Hilbert-Raum mit

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, dx.$$

L_2- und Sobolev-Räume

Der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen

$$L_2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{L_2(\Omega)} < \infty\}$$

ist ein Hilbert-Raum mit

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, dx.$$

Der Sobolev-Raum der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ über Ω ist definiert durch

$$H^k(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_2(\Omega) \quad \forall \alpha : |\alpha| \le k\}.$$

Hierbei bezeichnet D^α die schwachen Ableitungen.

Mehr zu Sobolev-Räumen

$H^k(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx$$

und induzierter Norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(u, v)_{H^k(\Omega)}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Außerdem definieren wir die *Seminorm*

$$|u|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Der Raum $H_0^1(\Omega)$ und der Spur-Operator

Wir definieren den Unterraum $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ als

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Der Raum $H_0^1(\Omega)$ und der Spur-Operator

Wir definieren den Unterraum $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ als

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \gamma_0 u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Theorem (Spursatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Es existiert ein linearer stetiger Operator

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 v = v|_\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

$\gamma_0 v$ heißt Spur von v auf Γ. Weiter existiert ein $C_\Gamma > 0$ mit

$$\|\gamma_0 v\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_\Gamma \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ein analoges Resultat gilt für „reguläre“ Randstücke $\Gamma_D \subset \Gamma$.

Partielle Integration

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und äußerem Normalenvektor $n = (n_1, \ldots, n_d)^\top$.

Partielle Integration

Für $u, v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)\, ds_x - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, v(x)\, dx$$

Green'sche Formel

Für $u \in H^2(\Omega)$ und $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds_x - \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\; v\, dx,$$

wobei $\partial u/\partial n = n \cdot \nabla u$ die äußere normale Ableitung ist.

Nützliche Ungleichungen

Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei X ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_X$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_X$. Es gilt

$$|(x,y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad \text{für } x, y \in X.$$

Nützliche Ungleichungen

Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei X ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_X$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_X$. Es gilt

$$|(x,y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad \text{für } x,y \in X.$$

Poincaré-Friedrich Ungleichung

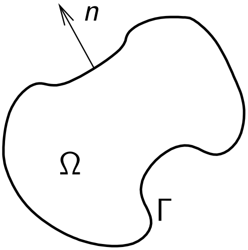
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Gebiet. Es existiert eine Konstante $C_P > 0$ mit

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \leq C_P \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ein analoges Resultat gilt auch für Funktionen aus $H_D^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, u = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$ und „regulärem“ $\Gamma_D \subset \Gamma$.

Elliptische Gleichungen: die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$



Vorgehen zur Bestimmung der Variationsformulierung:

1. Multiplikation der PDE mit glatter Testfunktion v
2. Integration über Ω
3. Eliminieren höherer Ableitungen durch partielle Integration
4. Einarbeiten der Randbedingungen
5. Variationsformulierung und Funktionenräume für u und v bestimmen

Variationsformulierung 1/2

Multiplikation der PDE mit glatter Testfunktion v**,** und **Integration über** Ω**:**

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx$$

Eliminieren höherer Ableitungen durch partielle Integration:
Wir verwenden die Green'sche Formel

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds_x + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx$$

Einarbeiten der Randbedingungen:
Bei Neumann-Randbedingung $\partial u / \partial n = g_N$ würde man diese nun ersetzen. Bei Dirichlet-Randbedingung wähle $v = 0$ auf $\Gamma = \Gamma_D$.

Variationsformulierung 2/2

Variationsformulierung und Funktionenräume bestimmen:

Finde $u \in H^1(\Omega): \quad u|_\Gamma = g \quad \text{und} \quad a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{wobei} \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad F(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$$

Variationsformulierung 2/2

Variationsformulierung und Funktionenräume bestimmen:

Finde $u \in H^1(\Omega): \quad u|_\Gamma = g \quad \text{und} \quad a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{wobei} \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad F(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$$

Achtung: Lax-Milgram nicht anwendbar!

Variationsformulierung 2/2

Variationsformulierung und Funktionenräume bestimmen:

Finde $u \in H^1(\Omega): \quad u|_\Gamma = g \quad \text{und} \quad a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{wobei} \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad F(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$$

Achtung: Lax-Milgram nicht anwendbar!

Setze $u = u_0 + u_g$ mit $u_0 = 0$ und $u_g = g$ auf $\Gamma = \Gamma_D$. Es folgt

Variationsformulierung 2/2

Variationsformulierung und Funktionenräume bestimmen:

$$\text{Finde } u \in H^1(\Omega): \quad u|_\Gamma = g \quad \text{und} \quad a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{wobei} \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad F(v) = \int_\Omega f\, v\, dx$$

Achtung: Lax-Milgram nicht anwendbar!

Setze $u = u_0 + u_g$ mit $u_0 = 0$ und $u_g = g$ auf $\Gamma = \Gamma_D$. Es folgt

$$\text{Finde } u_0 \in H_0^1(\Omega): \quad a(u_0,v) = \widetilde{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{wobei} \quad \widetilde{F}(v) = \int_\Omega f\, v\, dx - a(u_g, v)$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dies wird mit dem Lemma von Lax-Milgram bewiesen.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dies wird mit dem Lemma von Lax-Milgram bewiesen.

Beweise für

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

- Linearität
- Beschränktheit auf $H_0^1(\Omega)$ (Cauchy-Schwarz)
- Koerzivität auf $H_0^1(\Omega)$ (Poincaré-Friedrich)

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dies wird mit dem Lemma von Lax-Milgram bewiesen.

Beweise für

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

- Linearität
- Beschränktheit auf $H_0^1(\Omega)$ (Cauchy-Schwarz)
- Koerzivität auf $H_0^1(\Omega)$ (Poincaré-Friedrich)

Beweise für

$$\widetilde{F}(v) = \int_\Omega f \, v \, dx - a(u_g, v)$$

- Linearität
- Beschränktheit auf $H_0^1(\Omega)$ (Cauchy-Schwarz, evtl. Spursatz)

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dies wird mit dem Lemma von Lax-Milgram bewiesen.

Beweise für

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

- Linearität
- Beschränktheit auf $H_0^1(\Omega)$ (Cauchy-Schwarz)
- Koerzivität auf $H_0^1(\Omega)$ (Poincaré-Friedrich)

Beweise für

$$\widetilde{F}(v) = \int_\Omega f \, v \, dx - a(u_g, v)$$

- Linearität
- Beschränktheit auf $H_0^1(\Omega)$ (Cauchy-Schwarz, evtl. Spursatz)

$$\Longrightarrow \quad \text{Existenz und Eindeutigkeit von } u_0 \in H_0^1(\Omega)$$

Galerkin Approximation

$$\text{Finde } u_0 \in V : \quad a(u_0, v) = \widetilde{F}(v) \quad \forall v \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Finde } u_{0,h} \in V_h : \quad a(u_{0,h}, v_h) = \widetilde{F}(v_h) \quad \forall v \in V_h$$

$$\text{wobei} \quad V_h \subset V \quad \text{mit} \quad \dim V_h < \infty$$

Galerkin Approximation

$$\text{Finde } u_0 \in V: \quad a(u_0, v) = \widetilde{F}(v) \quad \forall v \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Finde } u_{0,h} \in V_h: \quad a(u_{0,h}, v_h) = \widetilde{F}(v_h) \quad \forall v \in V_h$$

$$\text{wobei} \quad V_h \subset V \quad \text{mit} \quad \dim V_h < \infty$$

Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine Basis von V_h und $u_{0,h} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A\alpha = b \quad \text{mit } A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i),\ b_i = \widetilde{F}(\varphi_i),\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Galerkin Approximation

$$\text{Finde } u_0 \in V : \quad a(u_0, v) = \widetilde{F}(v) \quad \forall v \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Finde } u_{0,h} \in V_h : \quad a(u_{0,h}, v_h) = \widetilde{F}(v_h) \quad \forall v \in V_h$$

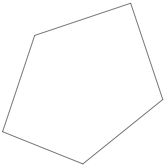
$$\text{wobei} \quad V_h \subset V \quad \text{mit} \quad \dim V_h < \infty$$

Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine Basis von V_h und $u_{0,h} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A\alpha = b \quad \text{mit } A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i),\ b_i = \widetilde{F}(\varphi_i),\ i,j = 1, \ldots, n.$$

Finite Elemente Methode:

$$\Omega \rightsquigarrow \mathcal{T}_h(\Omega)$$



$\rightsquigarrow$