

Finite Elemente in 1D und 2D

Johannes Veit

Ein Blick über den Tellerrand ... mit FreeFem++

8. Januar 2016

Gliederung

- 1 Rückblick
Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
Diskretisierung
Ansatzfunktion im Raum V_h
Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
Diskretisierung
Ansatzfunktion
Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
Konvergenzanalyse
FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat

Laplace - Gleichung:

$$-\Delta u(x) = 0$$

- Man betrachte das Problem auf dem Intervall $\Omega=(0; 1)$

Gliederung

1 Rückblick

Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
Galerkin Approximation

2 FEM im 1D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion im Raum V_h
Genauigkeit

3 FEM im 2D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion
Regeln für die Dreiecke

4 Konvergenzanalyse

Konvergenzanalyse
FreeFEM-Plots

5 Quellen

Aus der ersten Sitzung wissen wir

Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im
1D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion im
Raum V_h

Genauigkeit

FEM im
2D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion

Regeln für die
Dreiecke

Konv-analyse

Konvergenzanalyse

FreeFEM-Plots

Quellen

$$\text{Finde } u_0 \in V : \quad a(u_0, v) = \tilde{F}(v) \quad \forall v \in V$$

↓

$$\text{Finde } u_{0,h} \in V_h : \quad a(u_{0,h}, v_h) = \tilde{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\text{wobei } V_h \subset V \quad \text{mit} \quad \dim V_h < \infty$$

Ist $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von V_h und $u_{0,h} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A\alpha = b \quad \text{mit} \quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = \tilde{F}(\varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im
1D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion im
Raum V_h

Genauigkeit

FEM im
2D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion

Regeln für die
Dreiecke

Konv-analyse

Konvergenzanalyse

FreeFEM-Plots

Quellen

Diskretisierung

- Definition: Diskretisierung bedeutet die Gewinnung einer diskreten Teilmenge
- Hier wird das Gebiet Ω in äquidistante Teilmengen Δ zerlegt.

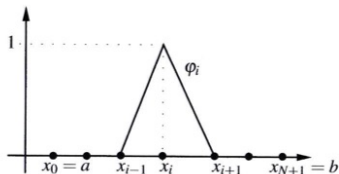
Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Ansatzfunktion im Raum V_h

$$X_h^r = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathcal{P}^r(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

- r beschreibt den Grad der Ansatzfunktion bzw. der Polynome (hier: linear $\hat{=}$ 1, quadratisch $\hat{=}$ 2)
- Lineare Ansatzfunktion
- Basisfunktion von X_h^1 zum Knoten x_i



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{für } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{für } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Finite

Elemente in
1D und 2D

Johannes Veit

Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im
1D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion im
Raum V_h

Genauigkeit

FEM im
2D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion

Regeln für die
Dreiecke

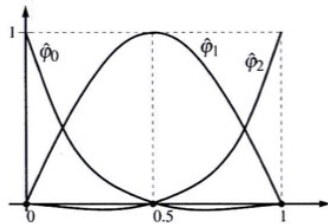
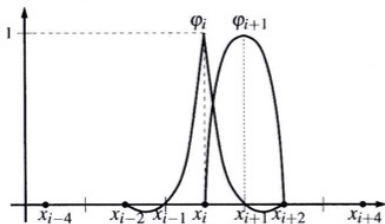
Konv-analyse

Konvergenzanalyse

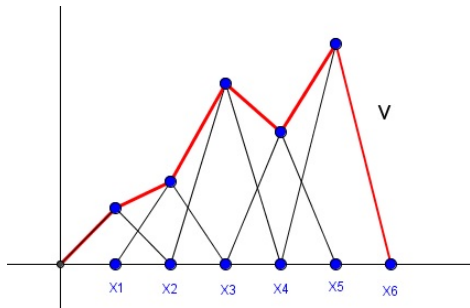
FreeFEM-Plots

Quellen

- quadratische Ansatzfunktion



$$X_h^2 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathcal{P}^2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$



Lineares Gleichungssystem

$$v(x) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \varphi_i(x), \quad (\text{allgemein } v(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i)$$

$$= (\Pi_h^1 v)(x) \rightarrow \alpha_i = v(x_i)$$

$$\text{FEM: } X_h^1 = \text{span}(\varphi_i)$$

Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit**
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Genauigkeit

Eine fundamentales Werkzeug der Galerkin-Methode ist das **Céa-Lemma**

Vorraussetzungen

Sei V ein reeller Hilbertraum mit der Norm $\| \cdot \|$.

Sei $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die

- beschränkt(äquivalent dazu stetig), d. h.
 $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ für eine Konstante $M > 0$ und $\forall u, v \in V$
- und koerzitiv ist, d. h. $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ für eine Konstante $\alpha > 0$ und $\forall v \in V$

Dann besagt das **Céa-Lemma**:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V \quad ,$$

, dass die Approximation der Lösung u_h aus dem Unterraum V_h höchstens um die Konstante $\frac{M}{\alpha}$ schlechter ist als die beste Approximation für u im Raum V_h .

Hierbei ist

- $u =$ exakte Lösung des Randwertproblems
- $u_h =$ Approximation
- für kleine h geht u_h gegen u
- h beschreibt Intervallgröße, ist proportional zur Abweichung

Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung**
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Diskretisierung in 2D

Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im 1D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion im
Raum V_h

Genauigkeit

FEM im 2D-Fall

Diskretisierung

Ansatzfunktion

Regeln für die
Dreiecke

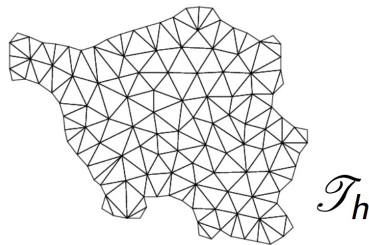
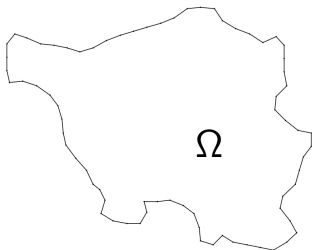
Konv-analyse

Konvergenzanalyse

FreeFEM-Plots

Quellen

Man betrachte das Problem auf der Fläche Ω (z.B. $=(0; 1)^2$)



Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion**
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

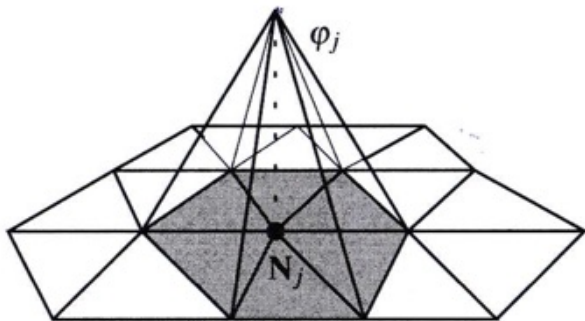
Ansatzfunktion in 2d

- Darstellung der Basisfunktion auf dem Raum

$$X_h^1 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathcal{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

(lineare Basisfunktionen)

- Hier wird Ω in Dreiecke zerlegt
- $N_j = 1$, an benachbarten Knoten $x_{n\pm 1} = 0$



Ansatzfunktion in 2d

- Darstellung der Basisfunktion auf dem Raum

$$X_h^2 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathcal{P}^2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

(quadratische Basisfunktionen)

- Auch hier wird Ω in Dreiecke zerlegt
- $N_j = 1$ oder 0 , an benachbarten Knoten $x_{n\pm 1} = 0$ oder 1 ,
an Knoten $x_{n\pm 2} = 0$

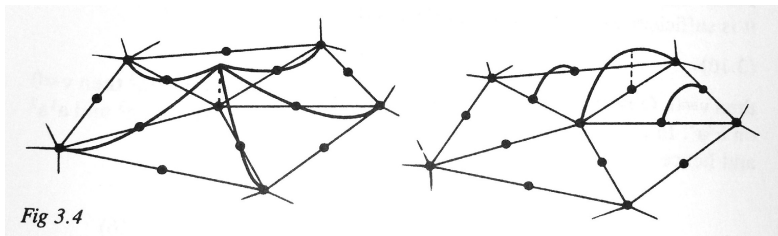


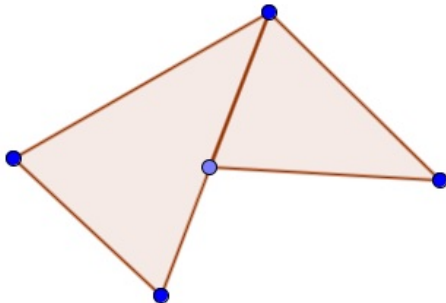
Fig 3.4

Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

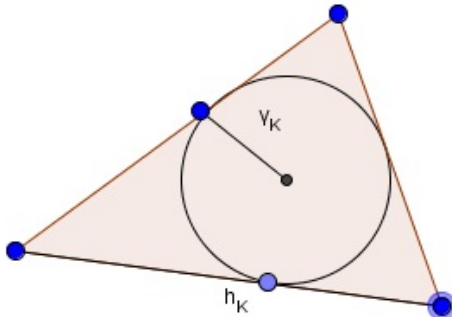
Regeln für die Dreiecke

- Keine Ecke eines Dreiecks darf auf einer Kante eines anderen Dreiecks liegen.
- Folgende Anordnung wäre verboten:



- Das Verhältnis vom Inkreis zur grössten Seite jedes Dreiecks ist nach oben beschränkt

$$\frac{h_K}{\gamma_K} < c \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$



Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

Interpolationsabschaetzung

- Folgende Bedingung wird auf das Céa-Lemma angewendet:

$$\|v - \Pi_h^r v\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{r+1-m} \|v\|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in H^{r+1}(\Omega)$$

- C ist eine Konstante, unabhängig von h und u
- Cea-Lemma:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^r u\|_V \quad V = H_0^1(\Omega)$$

- Hieraus ergibt sich für $u \in H^{r+1}(\Omega)$ und $u_h \in X_h^r(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} Ch^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

- Hier kann man die Approximation durch 2 Arten verbessern:
 - 1 h kleiner machen
 - 2 r erhöhen, also finite Elemente höherer Ordnung verwenden

- Man erhält nun Vorschriften für den Approximationsfehler

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^r \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

- Plottet man diesen Fehler gegen h (log-log-Plot), erhält man verschiedene Steigungen
- Diese Steigungen zeigen r , also den Grad der verwendeten Ansatzfunktionen

FE-Approximation

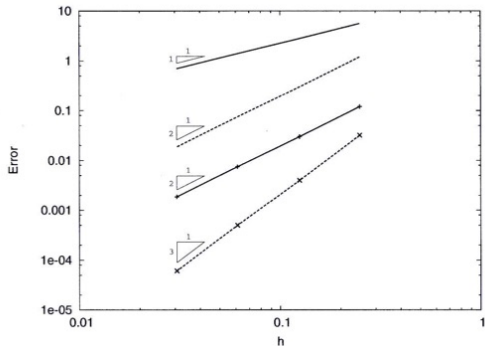
Gegeben sei das Poisson-Problem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

Gesucht sei

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v \in V_h \quad u_h \in X_h^1$$

Hier wurde anhand der exakten Lösung
 $u(x, y) = \sin(2 * \pi * x) \cos(2 * \pi * y)$ gelöst

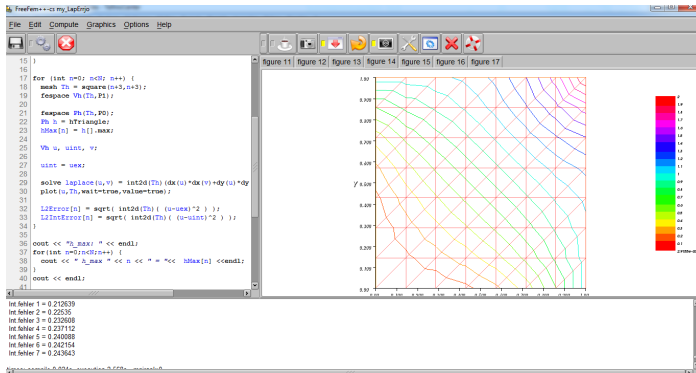


Gliederung

- 1 Rückblick
 - Laplace-Problem auf dem Einheitsquadrat
 - Galerkin Approximation
- 2 FEM im 1D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion im Raum V_h
 - Genauigkeit
- 3 FEM im 2D-Fall
 - Diskretisierung
 - Ansatzfunktion
 - Regeln für die Dreiecke
- 4 Konvergenzanalyse
 - Konvergenzanalyse
 - FreeFEM-Plots
- 5 Quellen

FreeFEM-Plots

- Wechseln wir nun zum Programm FreeFEM



Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im
1D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion im
Raum V_h
Genauigkeit

FEM im
2D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion
Regeln für die
Dreiecke

Konv-analyse

Konvergenzanalyse
FreeFEM-Plots

Quellen

Quellen

- A. Quarteroni: Numerical Models for Differential Problems, 2nd Ed., Springer-Verlag Italia 2014
- Einführungsvortrag Dr. Steffen Weißer (ein Blick über den Tellerrand ... mit FreeFem++)

Rückblick

Laplace-Problem auf
dem Einheitsquadrat

Galerkin
Approximation

FEM im
1D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion im
Raum V_h
Genauigkeit

FEM im
2D-Fall

Diskretisierung
Ansatzfunktion
Regeln für die
Dreiecke

Konv-analyse

Konvergenzanalyse
FreeFEM-Plots

Quellen

Zusammenfassung

- Approximation von Problemen mit der Galerkin-Methode
- Zerlegung des Intervalls (1D) oder der Fläche(2D) in Teilstücke der Breite h
- Stückweise Aufstellen durch Basisfunktionen der Ordnung r
- Durchführung und Visualisierung der Approximation durch FreeFEM
- Berechnen des Fehlers mit eigenem Programm