Ein Blick über den Tellerrand ... mit FreeFem++

Parabolische Gleichungen

Lars Erbelding

Universität des Saarlandes

15. Januar 2016

Gliederung

Typeinteilung bei PDEs 2ter Ordnung

Die allg. *lineare* PDE in zwei Variablen lautet

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial u}{\partial x_2} + fu = g$$

mit $a = a(x), \ldots, g = g(x)$.

Typeinteilung bei PDEs 2ter Ordnung

Die allg. *lineare* PDE in zwei Variablen lautet

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial u}{\partial x_2} + fu = g$$

mit $a = a(x), \ldots, g = g(x)$.

Die Gleichung heißt ...

1. *elliptisch*, falls $\triangle = b^2 - ac < 0$,
2. *hyperbolisch*, falls $\triangle = b^2 - ac > 0$,
3. ***parabolisch***, falls $\triangle = b^2 - ac = 0$ und

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2.$$

Parabolische Gleichungen

Wir betrachten parabolische Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ für } x \in \Omega, t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in \Gamma_D \; und \; t > 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \Psi(x,t),\ x \in \Gamma_N \; und \; t > 0$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, $f = f(x,t)$ gegeben.

Parabolische Gleichungen

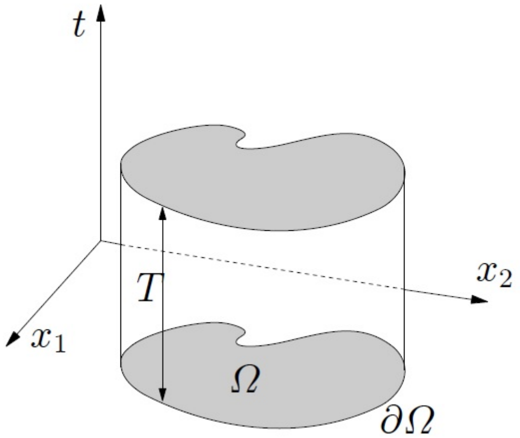

Abbildung: Der Zylinder $Q_T = \Omega \times (0, T)$

Beispiel

Ein Beispiel für den 1-dimensionalen Fall ist die Wärmeleitungsgleichung:

$$\underbrace{1}_{e}\frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{-k}_{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad , \quad 0 < x < d \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad 0 < x < d$$

$$u(0,t) = u(d,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

wobei $k > 0$ ist.

Umformulierung des Problems

Multiplizieren der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v = v(x)$ und Integration über Ω:

Umformulierung des Problems

Multiplizieren der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v = v(x)$ und Integration über Ω:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u(t) \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} f(t) \, v \, d\Omega, \ \forall v \in V$$

Umformulierung des Problems

Multiplizieren der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v = v(x)$ und Integration über Ω:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u(t) \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} f(t) \, v \, d\Omega, \; \forall v \in V$$

Eliminieren höherer Ableitungen durch partielle Integration (Green'sche Formel):

Umformulierung des Problems

Multiplizieren der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v = v(x)$ und Integration über Ω:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega - \int_\Omega \Delta u(t) \, v \, d\Omega = \int_\Omega f(t) \, v \, d\Omega, \; \forall v \in V$$

Eliminieren höherer Ableitungen durch partielle Integration (Green'sche Formel):

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial u(t)}{\partial n} v \, ds_x + \int_\Omega \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f(t) \, v \, d\Omega, \; \forall v \in V$$

Umformulierung des Problems

Einfachheitshalber setzen wir $\varphi = 0$ (Randbedingung).
Wir setzen $V = H_0^1(\Omega)$ und erhalten:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega + a(u(t), v) = \int_{\Omega} f(t) \, v \, d\Omega, \; \forall v \in V \qquad (1)$$

wobei $u(0) = u_0$ und $a(v, w) = \int\limits_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x)$ eine Bilinearform ist.

Variationsformulierung

Ebenso wird angenommen: $f(t) \in L^2(\Omega)\, \forall t > 0$
Mit der Einführung des L^2-Skalarproduktes
$(w, v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega w(x)v(x)\,dx$ erhalten wir folgende
Variationsformulierung:
Finde für jedes $t > 0$ ein $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, so dass:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{mit } u(0) = u_0$$

Existenz und Eindeutigkeit

Anwendung des Satzes:
Seien V und H Hilberträume, so dass $V \subset H$ mit kompakter Einbettung und V liegt dicht in H. Sei $a(u, v)$ eine symmetrische Bilinearform, welche koerziv und stetig in V ist. Ist $u_0 \in H$ und $f \in L^2((0, T); H)$. Dann hat das Problem

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = (f(t), v)_H, \; \forall v \in V, \; 0 < t < T$$

$$\text{mit } u(0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung $u \in L^2((0, T); V) \cap C([0, T]; H)$.

Galerkin-Approximation

Aufgabe: Finde für jedes $t > 0$ ein $u_h(t) \in V_h$, so dass:

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} v_h \, d\Omega + a(u_h(t), v_h) = \int_\Omega f(t) v_h \, d\Omega, \; \forall v_h \in V_h \qquad (2)$$

wobei $u_h(0) = u_{0h}$, $V_h \subset V$ endlicher Dimension.

Galerkin-Approximation

Aufgabe: Finde für jedes $t > 0$ ein $u_h(t) \in V_h$, so dass:

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} v_h \, d\Omega + a(u_h(t), v_h) = \int_\Omega f(t) v_h \, d\Omega, \ \forall v_h \in V_h \tag{2}$$

wobei $u_h(0) = u_{0h}$, $V_h \subset V$ endlicher Dimension.

Semi-Diskretisierung!

Matrixschreibweise

Bildung der Basis $\{\varphi_j\}$ von V_h und Ersetzung der u_h:

$$u_h(x,t) = \sum_{j=0}^{N_h} u_j(t)\varphi_j(x)$$

wobei $\{u_j(t)\}$ die Unbekannten des Problems repräsentieren.

Matrixschreibweise

$$\int_\Omega \sum_{j=0}^{N_h} \dot{u}_j(t)\varphi_j\varphi_i \, d\Omega + a\Big(\sum_{j=0}^{N_h} u_j(t)\varphi_j, \varphi_i\Big) = \int_\Omega f(t)\varphi_i \, d\Omega, \; i = 1, \ldots, N_h$$

$$\sum_{j=0}^{N_h} \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_\Omega \varphi_j\varphi_i \, d\Omega}_{m_{ij}} + \sum_{j=0}^{N_h} u_j(t) \underbrace{a(\varphi_j, \varphi_i)}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_\Omega f(t)\varphi_i \, d\Omega}_{f_i(t)}, \; i = 1, \ldots, N_h$$

In Matrixschreibweise:

$$M\dot{\boldsymbol{u}}(t) + A\boldsymbol{u}(t) = f(t), \, \forall t > 0$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

Matrixschreibweise

In Matrixschreibweise:

$$M\dot{\boldsymbol{u}}(t) + A\boldsymbol{u}(t) = f(t)$$

Definiere den Vektor von Unbekannten $u = (u_1(t), \dots, u_{N_h}(t))^T$, die Massenmatrix $M = [m_{ij}]$, die Matrix $A = [a_{ij}]$ und den Vektor $f = (f_1(t), \dots, f_{N_h}(t))^T$.

Lösen der DGL

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten diese gewöhnliche DGL zu lösen, z.B Runge-Kutta-Methoden, die Θ-Methode...

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Betrachten wir nun die Konvergenz von u_h zu u in geeigneten Normen.
Sei $a(\cdot,\cdot)$ koerziv so gilt:

$$\alpha\|(u-u_h)(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a((u-u_h)(t),(u-u_h)(t))$$

$$= a((u-u_h)(t),(u-v_h)(t)) + a((u-u_h)(t),(v_h-u_h)(t))$$

$$\forall v_h \in V_h,\ \forall t > 0$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Ziehen wir nun (2) von (1) ab und erhalten mit $w_h = v_h - u_h \in V_h$:

$$\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, w_h\right)_{L^2(\Omega)} + a(u-u_h, w_h) = 0$$

wobei

$$(v,w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega d\Omega vw$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Ziehen wir nun (2) von (1) ab und erhalten mit $w_h = v_h - u_h \in V_h$:

$$\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, w_h\right)_{L^2(\Omega)} + a(u-u_h, w_h) = 0$$

wobei

$$(v,w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega d\Omega vw$$

Nun erhalten wir:

$$\alpha\|(u-u_h)(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a((u-u_h)(t),(u-v_h)(t)) - \left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, w_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

Youngsche Ungleichung

Die Youngsche Ungleichung wird für weitere Schritte benötigt:

Youngsche Ungleichung

Die Youngsche Ungleichung wird für weitere Schritte benötigt:

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$$

$$\forall \epsilon > 0$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Betrachten der beiden Terme auf der rechten Seite der Ungleichung:
1. Term: Unter Benutzung der Stetigkeit der Bilinearform und der Youngschen Ungleichung:

$$a((u-u_h)(t),(u-v_h)(t))$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\|(u-u_h)(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{M^2}{2\alpha}\|(u-v_h)(t)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

2. Term: Setzen von $w_h = (v_h - u) + (u - u_h)$:

$$-\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, w_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, u - v_h\right)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u-u_h)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Nach Einsetzen und nach mehreren Umformungen (Integration über die Zeit von 0 bis t, Youngsche Ungleichung. . .) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\|(u-u_h)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\int_0^t \|(u-u_h)(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\mathrm{d}s$$

$$\leq 2\|(u-u_h)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{M^2}{\alpha}\int_0^t \|(u-v_h)(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\mathrm{d}s$$

$$+2\int_0^t \|(u-u_h)(s)\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial((u-v_h)(s))}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}s$$

$$+2\|(u-v_h)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(u)(0)-v_h(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Anwendung des Interpolationsfehlers:

$$\|v - \Pi_h^r v\|_{H^m(\Omega)} \leq C h^{r+1-m} |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Umbenennen der Terme auf der rechten Seite:

$$E_1 = 2\|(u - u_h)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^{2r} |u_0|^2_{H^r(\Omega)}$$

$$E_2 = \frac{M^2}{\alpha} \int_0^t \|u(s) - v_h(s)\|^2_{H^1(\Omega)} \mathrm{d}s \leq C_2 h^{2r} \int_0^t |u(s)|^2_{H^{r+1}(\Omega)} \mathrm{d}s$$

$$E_3 = 2\|u(t) - v_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3 h^{2r} |u(t)|^2_{H^r(\Omega)}$$

$$E_4 = \|(u - v_h)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_4 h^{2r} |u_0|^2_{H^r(\Omega)}$$

$$E_5 = \left\| \frac{\partial((u - v_h)(s))}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 h^r \left| \frac{\partial u(s)}{\partial t} \right|_{H^r(\Omega)}$$

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Zusammengefasst ergibt sich:

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \leq Ch^{2r} N(u)$$

wobei $N(u)$ eine geeignete Funktion in Abhängigkeit von u und C eine geeignete positive Konstante ist.

Konvergenz der Semi-Diskretisierung

Unsere Abschätzung lautet nun:

$$\|(u-u_h)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \|(u-u_h)(s)\|^2_{H^1(\Omega)} \mathrm{d}s$$

$$\leq Ch^{2r}N(u) + 2C_5 h^r \int_0^t \left| \frac{\partial u(s)}{\partial t} \right|_{H^r(\Omega)} \|(u-u_h)(s)\|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s$$

Θ-Methode

Matrixschreibweise:

$$M\dot{\boldsymbol{u}}(t) + A\boldsymbol{u}(t) = f(t)$$

Ersetzen der Ableitung durch den Differenzenquotient und der anderen Terme durch Linearkombinationen (mit dem Wert zum Zeitpunkt t^k und dem Wert zum Zeitpunkt t^{k+1}) ergibt:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + A[\Theta u^{k+1} + (1-\Theta)u^k] = \Theta f^{k+1} + (1-\Theta)f^k$$

Hierbei ist $\Theta \in [0,1]$ und τ der Diskretisierungsschritt (äquidistant).

Θ-Methode

Verschiedene Fälle:

1. Für $\Theta = 0$ erhalten wir die *forward (explizite) Euler Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + Au^k = f^k$$

Θ-Methode

Verschiedene Fälle:

1. Für $\Theta = 0$ erhalten wir die *forward (explizite) Euler Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + Au^k = f^k$$

2. Für $\Theta = 1$ erhalten wir die *backward (implizite) Euler Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + Au^{k+1} = f^{k+1}$$

Θ-Methode

Verschiedene Fälle:

1. Für $\Theta = 0$ erhalten wir die *forward (explizite) Euler Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + Au^k = f^k$$

2. Für $\Theta = 1$ erhalten wir die *backward (implizite) Euler Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + Au^{k+1} = f^{k+1}$$

3. Für $\Theta = 1/2$ erhalten wir die *Crank-Nicolson (Trapez) Methode*:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \frac{1}{2}A[u^{k+1} + u^k] = \frac{1}{2}(f^{k+1} + f^k)$$

Θ-Methode

Fallbeispiel $\Theta > 0$:
Unser System hat die Form $Ku^{k+1} = g$ wobei g der Ursprungsterm und $K = \frac{M}{\tau} + \Theta A$ ist.
M und A seien symmetrisch, so dass K auch symmetrisch ist und in Form $K = HH^T$ (Cholesky Faktorisierung) angegeben werden kann.
Nun kann für jeden Zeitschritt das System:

$$Hy = g$$
$$H^T u^{k+1} = y$$

gelöst werden (Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen).

Stabilität der Θ-Methode

Ausgehend von unserer Gleichung (2), wobei einfachheitshalber $f = 0$ gesetzt wird, wenden wir die Θ-Methode an:

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau}, v_h\right) + a(\Theta u_h^{k+1} + (1-\Theta)u_h^k, v_h) = 0$$

und prüfen anschließend auf Stabilität.

Stabilität der Θ-Methode

Ergebnisse:

Stabilität der Θ-Methode

Ergebnisse:
Für $\Theta = 0$ (*forward Euler Methode*) ist die Methode absolut stabil, ohne jegliche Einschränkungen an den Zeitschritt.

Stabilität der Θ-Methode

Ergebnisse:

Für $\Theta = 0$ (*forward Euler Methode*) ist die Methode absolut stabil, ohne jegliche Einschränkungen an den Zeitschritt.

Für $\Theta > 0$:

· Ist $\Theta \geq \frac{1}{2}$, so ist die Θ-Methode absolut stabil.

Stabilität der Θ-Methode

Ergebnisse:

Für $\Theta = 0$ (*forward Euler Methode*) ist die Methode absolut stabil, ohne jegliche Einschränkungen an den Zeitschritt.

Für $\Theta > 0$:

· Ist $\Theta \geq \frac{1}{2}$, so ist die Θ-Methode absolut stabil.

· Ist $\Theta < \frac{1}{2}$, so ist die Θ-Methode nur für $\tau \leq C(\Theta)h^2$ stabil.

Konvergenz der Θ-Methode

Vorausgesetzt, dass u_0, f und die exakte Lösung ausreichend regulär sind, kann eine a priori Fehlerschätzung aufgestellt werden:

$$\forall n \geq 1: \; \|u(t^n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha\tau \sum_{k=1}^{n} \|u(t^k) - u_h^k\|_V^2$$

$$\leq C(u_0, f, u)(\tau^{p(\Theta)} + h^{2r})$$

wobei $p(\Theta) = 2$, falls $\Theta \neq \frac{1}{2}$, $p(\frac{1}{2}) = 4$ und C abhängig von seinen Argumenten, aber nicht von h oder τ, ist.

FreeFEM-Code

Siehe Programm!

Quellen

1. A. Quarteroni: Numerical Models for Differential Problem, 2nd Ed., Springer-Verlag Italia 2014
2. G. Allaire und A. Craig: Numerical analysis and optimization, Oxford Univ. Press, UK, 2007
3. Vortrag von Dr. Steffen Weißer und Herrn Johannes Veit

Zusammenfassung

Wie löse ich nun eine parabolische Differentialgleichung?

1. Bilden der Variationsformulierung

Zusammenfassung

Wie löse ich nun eine parabolische Differentialgleichung?

1. Bilden der Variationsformulierung
2. Semi-Diskretisierung
   · Approximation des Problems mit der Galerkin-Methode / Matrixschreibweise

Zusammenfassung

Wie löse ich nun eine parabolische Differentialgleichung?

1. Bilden der Variationsformulierung
2. Semi-Diskretisierung
   · Approximation des Problems mit der Galerkin-Methode / Matrixschreibweise
3. Voll-Diskretisierung
   · Lösen der gewöhnlichen DGL mit z.B. der Theta-Methode

Zusammenfassung

Wie löse ich nun eine parabolische Differentialgleichung?

1. Bilden der Variationsformulierung
2. Semi-Diskretisierung
   · Approximation des Problems mit der Galerkin-Methode / Matrixschreibweise
3. Voll-Diskretisierung
   · Lösen der gewöhnlichen DGL mit z.B. der Theta-Methode

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!