

Zur Theorie und Numerik hyperbolischer  
Differentialgleichungen, dargestellt am  
Beispiel der Wellengleichung  
vorgetragen im von Dr. rer. nat. WEISSER abgehaltenen  
Seminar

Dipl.-Phys. A. Kreiter

Universität des Saarlandes

16-01-22

# Inhalt

1. Rückblick: elliptische und parabol. Differentialgleichungen (Dgl.)
2. Hyperbolische Differentialgleichungen (hDgl.)
3. Anfangs- und Randwerte
4. Lösbarkeit und Eindeutigkeit
5. Diskretisierung des Ortsraumes: Finite Elemente
6. Diskretisierung der Zeitachse: Finite Differenzen
7. Herleitung und physikalische Beziehungen
8. Besonderheiten
9. Nachweise
10. Code-Erörterung und Diskussion

# Rückblick: LAPLACE- und POISSON-Gleichung

Laplace-Gleichung (elliptisch)

$$\nabla^2 u(x) := \Delta u(x) = 0$$

Poisson-Gleichung (elliptisch)

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung (parabolisch)

$$-\Delta u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(x, t)$$

## Wellengleichung (a)

Die Wellengleichung (WGI) ist wegen  $c^2 \in \mathbb{R}^+$  hyperbolisch:

$$-\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{c^2 \partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

Für  $n=3$  beschreibt sie beispielsweise mit der *Phasengeschwindigkeit*  $c$  ablaufende raumzeitliche Ausbreitungsvorgänge ("Wellen") eines Feldes  $u(x, t)$ , dessen Quellen oder Senken gemäß  $f(x, t)$  verteilt sind. Die homogene WGI  $f(x, t) = 0$  ist als d'Alembert-Gleichung bekannt. Die Substitution  $x_0 = -ict$  erlaubt die Darstellung

$$-\sum_{\nu=0}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\nu^2} =: \square u(x) = f(x) \quad (2)$$

mit dem d'Alembert-Operator.

## Wellengleichung (b)

hDGL müssen nicht notwendigerweise  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  enthalten.

Isotrop dissipative Vorgänge werden durch einen Summanden mit  $\eta > 0$  einbezogen:

$$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\nu=0}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = f(x, t) \quad (3)$$

# Anfangs- und Randwerte (AW/RW)

Die zur eindeutigen Lösung der WGI in einem begrenzten Gebiet  $\Omega$  erforderlichen Integrationsbedingungen sind gegeben als Dirichlet-Randwerte

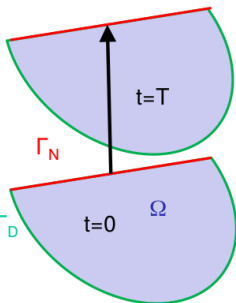
$$u(x, t) = g_D, x \in \Gamma_D := \partial\Omega_D, t > 0 \quad (4)$$

Neumann-Randwerte

$$\vec{n} \cdot \nabla u(x, t) = g_N, x \in \Gamma_N, t > 0 \quad (5)$$

bzw. eine Mischung (Cauchy) oder Kombination (Robin bzw. Fourier) beider  $\Gamma_D$  sowie Anfangswerte

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), x \in \Omega \quad (6)$$



# Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Die Beweisführung umfaßt folgende Schritte

- a-b Die WGI wird als Variationsintegral dargestellt (schwache Differenzierbarkeit im Sinne partieller Integration).
- c-f Zu dessen Berechnung wird eine eindeutige Lösung auf Basis Hilbertscher Eigenfunktionen verwendet.
- g-h Die Erfüllung der AW/RW-Bedingungen wird festgestellt.

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (a)

Die Wellengleichung (3) wird mit einer Testfunktion  $v(x) \in H_0^1(\Omega)$  multipliziert, integriert

$$\frac{d^2 \int_{\Omega} u(x, t) \cdot v(x) dx}{c^2 \cdot dt^2} + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot v(x) dx \quad (7)$$

und mit ihren Anfangswerten in die Variationsform der schwachen Differenzierbarkeit gebracht:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega); \quad 0 < t < T; \\ u(\cdot, t) |_{t=0} = u_0; \quad \frac{du(\cdot, t)}{dt} |_{t=0} = v_0 \end{cases} \quad (8)$$



## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (b)

**Theorem:** Seien  $V(\Omega)$  und  $H(\Omega)$  zwei Hilbert-Räume mit  $v \in H$  als kompakter Einbettung und  $V$  dicht in  $H$  (üblicherweise  $V = L$  oder  $V = H_0^1(\Omega)$ ). Sei  $a(u, v)$  eine symm. stetige koerzive Bilinearform. Unter den Gegebenheiten aus (8) hat die mit der t-unabhängigen Testfunktion  $v(x)$  in die darin aufgeführte Variationsform gebrachte Wellengleichung eine eindeutige Lösung. Weiter existiert eine nur von  $\Omega$  und  $T$  abhängige obere Schranke  $C > 0$ , womit die Energieabschätzung zur Lösung  $u(x, t)$  lautet:

$$\|u\|_{C([0; T]; V)} + \|u\|_{C^1([0; T]; V)} \leq C \cdot (\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|f\|_{L^2([0; T]; H)})$$

(9)

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (c)

**Nebenbemerkung:** Analog zur pDGI ist die schwache Koerzivität der Bilinearform  $a(v, v) \forall v \in V$  mit 2 pos. Konstanten  $\mu$  und  $\nu$  abschätzbar zu

$$a(v, v) + \eta \|v\|_H^2 \geq \nu \|v\|_V^2 \forall v \in V \quad (10)$$

Mit dem Ansatz

$$u(t) = e^{\sqrt{\eta}t} w(t) \quad (11)$$

wird die Variationsform in

$$\frac{d^2 \langle w(t), v \rangle_H}{dt^2} + a(w(t), v) + 2\sqrt{\eta} \frac{d \langle w(t), v \rangle_H}{dt} + \eta \langle w(t), v \rangle_H = \quad (12)$$

$$\langle f(t), v \rangle_H \quad \forall v \in V, \quad 0 < t < T$$

überführt. Damit wird die Voraussetzung der Koerzivität abgeschwächt.

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (d)

Gemäß (11) wird der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit analog dem für pDGL geführt: Sei

$u \in C([0; T]; V) \cap C^1([0; T]; H)$  Lösung von (8). Dann wird die aus den Eigenfunktionen zur Variationsformulierung der eDGL gebildete Hilbertraumbasis  $u(k)_{k>0}$  verwendet, somit

$$u_k \in V, \quad a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v \rangle_H \quad \forall v \in V \quad (13)$$

erfüllend. Mit

$$\alpha_k^0 = \langle u_0, u_k \rangle_H, \alpha_k^1 = \langle v_0, u_k \rangle_H, \alpha_k(t) = \langle u(t), u_k \rangle_H \quad (14)$$

wird

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \cdot u_k = \lim \sum_{l=1}^k \alpha_l(t) \cdot u_l \quad (15)$$

und mit  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  ergibt sich die eindeutige Lösung.

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (e)

Lautet die Lösung zu

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \lambda_k\alpha_k = \beta_k & \text{in } ]0; T[ \\ \alpha_k(t)|_{t=0} =: \alpha_k^0, \quad \dot{\alpha}_k|_{t=0} =: \alpha_k^1 \end{cases} \quad (16)$$

also

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} (\alpha_k^1 \sin(\omega_k t) + \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds) \quad (17)$$

gilt, so bleibt zu zeigen, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k (\alpha_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} (\alpha_k^1 \sin(\omega_k t) + \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds)) \quad (18)$$

konvergiert, d.h., daß die Teilreihen eine CAUCHY-Folge bilden.

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (f)

Wegen der Orthogonalität der  $(u_j)$  in  $H$  und  $V$  ergibt sich für  $l > k, \forall t$  eine Abschätzung der  $a$  zu

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) + \left\| \frac{d(w^l - w^k)}{dt} \right\|_h^2 = \sum_{j=k+1}^l (\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + \left| \frac{d\alpha_j(t)}{dt} \right|) \quad (19)$$

Multipliziert man (17) mit  $\dot{a}_k(t)$  und integriert von 0 bis  $t$ , ergibt sich

$$|\dot{\alpha}(t)|^2 + \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 = |\alpha_j^1|^2 + \lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 2 \int_0^t \beta_j(s) \dot{\alpha}_j(s) ds \quad (20)$$

und aus (18) ergibt sich die Abschätzung

$$|\dot{\alpha}_j(t)| \leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \int_0^t |\beta_j(s)| ds \quad (21)$$

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (g)

Kombiniert man (20) mit (21), erhält man

$$|\dot{\alpha}_j(t)|^2 + \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 \leq 2(|\alpha_j^1|^2 + \lambda_j |\alpha_j^0|^2 + t \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds) \quad (22)$$

Mit  $u_0 \in V$ ,  $u_1 \in H$  und  $f \in L^2([0; T]; H)$  ergibt sich

$$\begin{cases} \|u_0\|_V^2 = a(u_0, u_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\alpha_j^0|^2 < +\infty \\ \|v_0\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \\ \|f\|_{L^2([0; T]; H)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds < +\infty \end{cases} \quad (23)$$

mit der Folge, daß die Reihe der  $w^k$  auf der re. Seite von (22) zu

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} (\|w^l(t) - w^k(t)\|_V^2 + \|\dot{w}^l(t) - \dot{w}^k(t)\|_H^2) = 0 \quad (24)$$

konvergiert, also das Cauchy-Kriterium in  $C^1([0; T]; H)$  und  $C([0, T]; V)$  erfüllt.

## Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (h)

Die Räume  $C^1([0; T]; H)$  und  $C([0, T]; V)$  sind vollständig, damit konvergieren die  $w^k$  gegen den somit definierten Grenzwert  $u$ ; insbesondere konvergieren die  $w^k(0)$  und die  $\dot{w}^k(0)$  gegen  $u_0$  bzw.  $v_0$  in  $V \times H$ , so daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Andererseits erfüllt  $u(t)$  die Variationsformulierung, da diese von der Reihe für jede Testfunktion  $v = u_k$  erfüllt wird. Da  $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$  Hilbert-Basis von  $V$  ist, erfüllt (16) die Variationsformulierung für alle Testfunktionen  $v \in V$ , womit  $u$  die gesuchte Lösung von (16) ist. □

## Semidiskretisierung im Ortsraum

Konstruktion eines Finite-Elemente-Unterraumes  $V_{0h}$  von  $H_0^1(\Omega)$ , worin die Variations-Formulierung (12) für die diskretisierte Form  $u_h$  der Welle lautet

$$\begin{cases} \frac{d^2 \langle u_h(t), v_h \rangle_H}{dt^2} + a(u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle \forall v_h \in V_h^0, 0 < t < T \\ u_h|_{t=0} = u_{h,0}, \dot{u}_h|_{t=0} = v_0, h \end{cases} \quad (25)$$

indem man zugleich  $u_{h0}$  und  $v_{h0}$  ansetzt. Zu zeigen ist, daß (25) eine eindeutige, explizite Lösung hat. Ansatz ist die Verwendung einer zeitunabhängigen  $(\phi_k)$ -Basis für  $V_{0h}$ , nach der  $u_h$  zerlegt werden kann.



# Zeitdiskretisierung: Finite Differenzen (a)

Man setzt

$$\begin{cases} u_h(t) = \sum_{\mu=1}^m U_{\mu}^h(t) \phi_{\mu}, \\ u_h|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^m U_{\mu}^{h0} \phi_{\mu}, \\ \dot{u}_h|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^m V_{\mu}^{h0} \phi_{\mu}, \\ b_{\mu}^h(t) = \langle f(t), \phi_{\mu} \rangle_{L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (26)$$

...

## Zeitdiskretisierung: Finite Differenzen (b)

...und erhält das bereits bekannte lineare System gewöhnlicher DGL. 2. Ordnung konstanter Koeffizienten in Massen- ( $\mathbf{M}$ ) und Steife- ( $\mathbf{K}$ )-matrixform

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \ddot{U}^h(t) + \mathbf{K}_h U^h(t) = b^h(t), 0 < t < T \\ U^h|_{t=0} = U^{0,h}, \quad \dot{U}^h|_{t=0} = V^{0,h} \\ M_{\mu\nu} = \langle \phi_\mu, \phi_\nu \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad K_{\mu\nu} = a(\phi_\mu, \phi_\nu), \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n \end{cases} \quad (27)$$

das als Ausgangspunkt der zeitlichen Diskretisierung dient, indem das Intervall  $]0;T[$  in  $n$  Intervalle der Länge  $\tau = T/n$  zerlegt wird, deren jeweiligen Ergebnisse als Ausgangspunkt für den folgenden Schritt dienen.

## Zeitdiskretisierung: Finite Differenzen (c)

Für die Wellengleichung sei hier das  $\Theta$ -Schema betrachtet

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{U^{\mu+1} - 2U^\mu + U^{\mu-1}}{\tau^2} + \mathbf{K}(\Theta U^{\mu+1} + (1 - 2\Theta)U^\mu + \Theta U^{\mu-1}) \\ = \Theta b(t_{\mu+1}) + (1 - 2\Theta)b(\tau_\mu) + \Theta b(\tau_{\mu-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

welches für  $\Theta = 0$  explizit, für  $\Theta = 1$  implizit und für  $\Theta = \frac{1}{2}$  CRANK-NICOLSON-Schema heißt. Für den ersten Schritt werden  $U^0$  und  $U^1$  aus den Anfangsbedingungen errechnet:

$$U^0 = u_0; \quad \frac{U^1 - U^0}{\tau} = v_0 \quad (29)$$



## Zur physikal. Herkunft der Wellengleichung (a)

Ausgangspunkt sei ein lokaler Vorgang, bspw. die Bewegung einer Punktmasse  $m$  unter dem Einfluß einer linear von deren Verschiebung  $r(\vec{t})$  abhängigen Kraft  $\vec{K}$ , woraus gemäß 2. NEWTONschen Axiom die Bewegungsgleichung

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -D \cdot \vec{r} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

als lineare DGL. 2. Grades hervorgeht, deren Lösung  $\vec{r}(t)$  einen zyklischen Vorgang der Periodendauer

$$\tau = \nu^{-1} = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{D}}$$

beschreibt.

## Zur physikal. Herkunft der Wellengleichung (b)

Übergang von der Massendistribution gekoppelter Oszillatoren zur kontinuierlichen Massendichte ermöglicht die Beschreibung ihrer Bewegung als raumzeitliche Fluktuation ("P-Wellen" in homogenen nichtviskosen Fluiden). Deren *Schnellefelder*  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  sind somit wirbelfrei, weshalb sie als Gradient eines skalaren Potentialfeldes  $\psi(\vec{r}, t)$

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = -\nabla\psi$$

angesetzt und eine Wellengleichung anstelle für den Schalldruck  $p(\vec{r})$  als deren mit Massendichte  $\rho$  gewichtete Zeitableitung eingesetzt werden kann:

$$p = \rho \cdot \dot{\psi}(\vec{r}, t) \Rightarrow \nabla^2\psi - \frac{\ddot{\psi}(\vec{r}, t)}{c^2} = f(\vec{r}, t)$$

# Homogene Wellengleichung, Ansatz von d'ALEMBERT

Der d'ALEMBERTSche Ansatz geht von einer partikulären Lösung der homogenen Wellengleichung der Form

$$u(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}^0 \cdot \vec{r} \pm ct)$$

aus, wobei  $\vec{r}^0$  ein konstanter Einheitsvektor und  $\Phi \in L^2$  eine 2fach differenzierbare Funktion oder Distribution ist. Jede Linearkombination  $a \cdot \Phi_+ + b \cdot \Phi_-$  ist gleichfalls Lösung. Der innerhalb des durch deren Argument aufgespannten Doppelkegels liegende Bereich des  $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}$  wird als **Kausalbereich** bezeichnet

# Ebene Wellen, Wellenvektor

Durch die Gleichung

$$\vec{r}^0 \cdot \vec{r} - ct = k \quad (30)$$

mit festem  $k \in \mathbb{R}$  wird eine Ebene definiert, die Lösung  $u(\vec{r}, t)$  der Wellengleichung beschreibt daher ebene Wellen. Das Lot auf diese Wellenebenen ist parallel zu  $\vec{r}^0$  und zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Wellenfront von  $u$ . Statt der (skalaren) Auslenkung  $u$  kann man auch den Auslenkungsvektor  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  betrachten, dessen Propagation entlang des sog. Wellenvektors  $\vec{k}$  (mit als *Wellenzahlen* bezeichneten Komponenten  $k_i$  erfolgt).

# Monochrome Wellen, HELMHOLTZ-Gleichung

Emittieren die Quellen  $F$  monochrome Wellen der Form  $F(\vec{r}, t) = f(\vec{r})e^{-2\pi i\nu t}$  mit  $\omega = 2\pi\nu$ , kann für das Wellenfeld der Produktansatz  $u(\vec{r}) = w(\vec{r})e^{-i\omega t}$  mit  $w \in \mathbb{C}$  gewählt werden. Einsetzen ergibt die HELMHOLTZ-Gleichung

$$\Delta w(\vec{r}) + k^2 w(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \quad (31)$$

mit der Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$



# Telegraphengleichung

Dissipative Einflüsse, z.B. ohmsche Widerstände werden durch Einfügen eines Dämpfungsterms in die Wellengleichung beschrieben, woraus sich die Telegraphengleichung

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) - \Delta u(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t) \quad (32)$$

mit der Dämpfungskonstanten  $a \in \mathbb{R}^+$  ergibt.

# SCHRÖDINGER-Gleichung

Die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung (1926) beschreibt die raumzeitliche Dispersion eines Materiepaketes

$$-\frac{\hbar \cdot \partial \psi(\vec{r}, t)}{i \cdot \partial t} + \frac{\hbar^2 \Delta \psi(\vec{r}, t)}{2m} = V(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t) \quad (33)$$

gehört jedoch aufgrund ihrer Charakteristik zu den parabolischen Differentialgleichungen; ersetzt man das Potential durch dessen Gesamtenergie, erhält man ihre zeitunabhängige Variante

$$\frac{\hbar^2 \Delta \psi(\vec{r})}{2m} = E \cdot \psi(\vec{r}) \quad (34)$$

als Eigenwertgleichung für stationäre Zustände quantenmechanischer Systeme.

# KLEIN-GORDON-Gleichung

Diese relativistische Form der SCHRÖDINGER-Gleichung beschreibt die LORENTZ-invariante Dispersion eines Materiepaketes

$$-\frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{c^2 \cdot \partial t^2} + \Delta \phi(\vec{r}, t) = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \cdot \phi(\vec{r}, t) \quad (35)$$

Sie läßt sich **nicht** mehr als Wahrscheinlichkeitsamplitude interpretieren: Ihre Stromdichte  $\langle \psi, \psi \rangle$  nimmt die Form

$$\frac{i\hbar}{2mc^2} (\phi^{cc} \cdot \dot{\phi} - \phi \cdot \dot{\phi}^{cc}) \quad (36)$$

an.

# MAXWELL-Gleichungen

Aus dem Induktionsgesetz  $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  in Verbindung mit der Quellenfreiheit der Induktion  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , dem BIOT-SAVART-Gesetz  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\phi$ , den Materialgleichungen und der LORENTZ-Eichung

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow \Delta \psi + \nabla \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

ergeben sich die Darstellungen

$$\left[\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right] \vec{A} = -\mu \mu_0 \rho \cdot \vec{v}, \left[\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

mit dem d'ALEMBERT-Operator in 4-dimensionaler LAPLACE-Gleichung

# Auf den Schultern von Riesen - Quellenverzeichnis

- i St. Weißer: Folienvorträge im Seminar, 2015, sowie umfassende Vorbesprechung und Hinweise zur Programmierung
- ii Allaire, Numerical Analysis and Optimization, Kap. 8 (Oxford Science Publications), 2007
- iii F. Hecht, Freefem++ 3<sup>rd</sup> Edition V3.38-3
- iv A. Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011
- v M. Nicolai & al: Elast. 2dim. Tragwerksberechnung, RWTH Aachen, 2013
- vi sowie aufbauend auf und voraussetzend die Arbeiten der im Seminar (i) Vortragenden K. Jakob, J. Veit und L. Erbeding

# numerische Simulation: Schwingende Membran

Das erste Video (hdG3b.avi) zeigt zur FEM-Lösung der Wellengleichung im  $200 \times 200$ px-Quadrat den Gradientenbetrag der Welle  $u(x, y, t)$  (vergleichbar einer schlierenoptischen Aufnahme) mit Neumann-Randbedingung, Anfangsgeschwindigkeit 0 zur Nachbildung der nebenstehenden Simulation (Sourcecode hdG3b.edb)

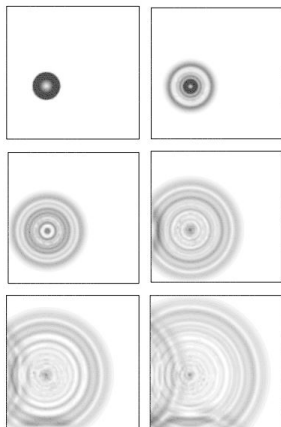
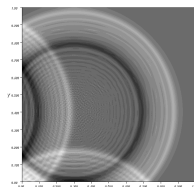
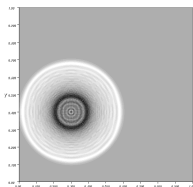


Figure 8.2. Modulus at time  $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  of  $|\nabla u|$ .



## numerische Simulation: Schwingende Ellipse(n)

**hDG4a.avi** zeigt den Betrag des Auslenkungs-Gradientenfelds einer ellipsenförmigen Membran (360 Randpunkte) mit Anfangsimpuls-Mittelpunkt  $(-1;0)$  **hDG4c.avi** zeigt die Auslenkung  $u(x,y)$  einer biegeschlaffen Membran selbst, beginnend mit  $u(., t = 0) = e^{-4(x+1)^2 - 3(y-0.5)^2}$ . Die Symmetrie entlang der  $x$ -Achse wird in einem weiteren Fall, **hDG4d.avi** zusätzlich dadurch gebrochen, daß die Anfangsauslenkung  $u_0$  nicht nur anisotrop, sondern auch parallel zur  $y$ -Achse verschoben ist. Die incrementale Zeitbasis  $\tau$  wird im Zeitverlauf schrittweise verkürzt, um die wachsende Anzahl angeregter Schwingungsmoden ausreichend aufzulösen. Anders als in **hDG4c.avi** ergibt sich keine "Wiederkehr" des ersten Auseinanderlaufens der anfangs eingprägten Verformung.  $\square$