

Legendre-Fourier Spektralmethode für das Vlasov-Poisson System

Philipp Schmeer

Universität des Saarlandes

08. Januar 2018

Gliederung

- 1 Das Vlasov-Poisson System
 - Herleitung über das Vlasov-Maxwell System
- 2 Legendre-Fourier Spektralmethode
 - Spektralmethode
 - Transformation mittels Legendre-Fourier
 - L^2 -Stabilität des Verfahrens
 - Auswirkungen auf die Erhaltungsgesetze
- 3 Numerische Auswertung
 - Landau Dämpfung
 - Zwei-Strom Instabilität
 - Ionenschallwelle

Vlasov-Gleichung

Vlasov-Gleichung:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla_x f_s v + \nabla_v f_s \frac{q_s}{m_s} (E + v \times B) = C(f_s)$$

Kollisionsfreie Vlasov-Gleichung:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla_x f_s v + \nabla_v f_s \frac{q_s}{m_s} (E + v \times B) = 0$$

Maxwell-Gleichungen

- $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = \mu_0 J$ (Ampère's erw. Durchflutungsgesetz)
- $\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0$ (Faraday's Gesetz)
- $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gauß'sches Gesetz)
- $\nabla \cdot B = 0$ (Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder)

- Reduzierung des Vlasov-Maxwell Systems auf das Vlasov-Poisson System: das Magnetfeld sei quasi-statisch
- ⇒ Setze die nach der Zeit durchgeführten Ableitungen in den Maxwell-Gleichungen identisch 0

Die reduzierten Maxwell-Gleichungen

- $\nabla \times B = \mu_0 J$ (Ampère)
- $\nabla \times E = 0$ (Faraday)
- $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gauß)
- $\nabla \cdot B = 0$ (Gauß für Magnetfelder)

Herleitung über das Vlasov-Maxwell System

- Betrachte das elektrische Feld: $\nabla \times E = 0$, $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Schreibe $E = -\nabla\Phi$ als den Gradienten des Potentials Φ
- Beachte: $\nabla \cdot \nabla = \Delta$
- $-\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla \cdot E = \nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi \Leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\Delta\Phi$

Poisson-Gleichung

Hiermit erhält man die sogenannte Poisson-Gleichung:

$$(\nabla E =) - \Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- niedrig-frequentes Plasma
 ⇒ Anteil des elektr. Feldes E dominiert die Lorentzkraft
 $F = q(E + v \times B)$
 ⇒ Setze den Anteil des Magnetfeldes B gleich 0
- Die kollisionsfreie Vlasov-Gleichung reduziert sich damit zu
 $\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla_x f_s v + \nabla_v f_s \frac{q_s}{m_s} E = 0$
- Als Kombination der reduzierten kollisionsfreien Vlasov-Gleichung und der Poisson-Gleichung erhält man:

Vlasov-Poisson System

- $\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla_x f_s v + \nabla_v f_s \frac{q_s}{m_s} E = 0$, $x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3, t > 0$,
- $\rho = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} f_s dv$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$,
- $-\Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$,
- $E = -\nabla \Phi$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$,
- Anfangsdaten $f_s(x, v, 0) = f_s^0(x, v)$.

Spektralmethoden

- Spektralmethoden: mathematische Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen (Vlasov-Poisson System)
- basiert auf der Idee der Verwendung von globalen Ansatzfunktionen → Ansatzfunktionen dienen der Approximation einer Funktion (über Fourierreihen oder Legendre-Polynome)
- Zusatz in unserer Version: Vereinfachung der Komplexität
→ Reduzieren auf eindimensionalen Zustand $x, v \in \mathbb{R}$
⇒ 3-dimensionale statt 7-dimensionale Problemstellung (unter Berücksichtigung der Zeit t)

- Verhalten jeder Partikelspezies $s \in \{e, i\}$ wird im Phasenraum $[0, L] \times [v_a, v_b]$ für sämtliche Zeitpunkte $t \geq 0$ durch die Verteilungsfunktion $f_s(x, v, t)$ beschrieben
- Vlasov-Gleichung für $x, v \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0$$

- Poisson-Gleichung für $x, v \in \mathbb{R}$:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = \rho$$

Annahmen

- physikalischer Raum periodisch in $x \Rightarrow$ keine Randbedingungen an f_s für $x = 0$ und $x = L$ notwendig
- Randbedingungen für f_s an $v = v_a$ und $v = v_b$:

$$f_s(x, v_a, t) = 0 = f_s(x, v_b, t) \quad \forall t \geq 0, x \in [0, L]$$

- Anfangsdaten für $t = 0$ der Form $f_s(x, v, 0) = f_s^0(x, v)$

Vorgehensweise:

- Diskretisierung in der Geschwindigkeitsvariable durch Verwendung der Legendre-Polynome
- Diskretisierung in der Ortsvariable durch Verwendung der Fourierreihe
- Diskretisierung in der Zeit durch Crank-Nicolson-Verfahren

Transformation durch Verwendung der Legendre-Polynome

Legendre-Polynome

$(L_n(\eta))_{n=0}^{\infty}$ für $\eta \in [-1, 1]$ rekursiv definiert durch:

$$L_0(\eta) = 1, \quad L_1(\eta) = \eta \quad \text{und}$$

$$(2n + 1)\eta L_n(\eta) = (n + 1)L_{n+1}(\eta) + \eta L_{n-1}(\eta) \quad \text{für } n \geq 1.$$

- Legendre-Polynome durch $\int_{-1}^1 L_m(\eta)L_n(\eta)ds = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$ normalisiert
- Lineare Transformation

$$v(\eta) = \frac{v_a + v_b}{2} + \frac{\eta(v_b - v_a)}{2}$$

bildet Legendre-Polynome auf $[v_a, v_b]$ ab

- Inverse Abbildung gegeben durch

$$\eta(v) = \frac{2v - (v_a + v_b)}{(v_b - v_a)}$$

Transformierte Legendre-Polynome

Das n -te transformierte Legendre-Polynom Φ_n ist durch

$$\Phi_n(v) = \sqrt{2n+1}L_n(\eta(v))$$

gegeben. Der Faktor $\sqrt{2n+1}$ ist dabei so gewählt, dass die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{v_a}^{v_b} \Phi_m(v)\Phi_n(v)dv = (v_b - v_a)\delta_{mn}$$

erfüllt ist.

Spektralzerlegung der Verteilungsfunktion f_S mit Hilfe der transformierten Legendre-Polynome

$$f_S(x, v, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_S^n(x, t) \Phi_n(v) ,$$

wobei $C_S^n(x, t) := \frac{1}{v_b - v_a} \int_{v_a}^{v_b} f_S(x, v, t) \Phi_n(v) dv$.

- Problem: Randbedingungen $f_S(x, v_a, t) = 0 = f_S(x, v_b, t)$ nicht erfüllt, da $\Phi_n(v)$ ungleich 0 an den Rändern von $[v_a, v_b]$

- Lösungsmöglichkeiten:

1) modifizierte Ansatzfunktionen $\tilde{\Phi}_n := \Phi_{n+2} - \Phi_n$ für $n \geq 0$
 $\Rightarrow \tilde{\Phi}_n(v_a) = 0 = \tilde{\Phi}_n(v_b) \quad \forall n \geq 0$

2) modifizierte Ansatzfunktion

$$\tilde{\Phi}_n := \begin{cases} \Phi_{n+2} - 1, & \text{für gerade } n \geq 0 \\ \Phi_{n+2} - v, & \text{für ungerade } n \geq 1 \end{cases}$$

3) Führe partielle Integration für die Geschwindigkeitsterme in der Vlasov-Gleichung durch und erhalte somit die Randbedingungen in schwacher Form

- Strategie 1) \Rightarrow Instabilität des Verfahrens
- Strategie 2) \Rightarrow Verlust der Orthogonalitätsbeziehung
- Favorisierte Lösung: Strategie 3)

Vorgehensweise

Setze die Spektralzerlegung in die Vlasov-Gleichung ein, multipliziere anschließend mit Φ_n und integriere dann über das Geschwindigkeitsintervall $[v_a, v_b]$.

Durch die Rekursionsformel der Legendre-Polynome und deren Orthogonalitätsbeziehungen erhalten wir somit für die Legendre-Koeffizienten $C_s^n(x, t)$:

$$\frac{\partial C_s^n}{\partial t} + \sigma_{n+1} \frac{\partial C_s^{n+1}}{\partial x} + \sigma_n \frac{\partial C_s^{n-1}}{\partial x} + \bar{\sigma} \frac{\partial C_s^n}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} E \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{n,i} C_s^i - \delta_v [f_s \Phi_n]_{v_a}^{v_b} \right) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Notation:

$$C_s^{-1} := 0, \quad \bar{\sigma} := \frac{v_a + v_b}{2}, \quad \sigma_n := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ \frac{v_b - v_a}{2} \frac{n}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}}, & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{und } \delta_v [f_s \Phi_n]_{v_a}^{v_b} := \frac{f_s(x, v_b, t) \Phi_n(v_b) - f_s(x, v_a, t) \Phi_n(v_a)}{v_b - v_a}$$

der aus der partiellen Integration resultierende Grenzterm bezüglich des Integralterms, welcher die Ableitung in v enthält.

- Annahme: $C_s^n = 0 \forall n \geq N_L \Rightarrow$ Abschneiden der Spektralzerlegung von f_s nach den ersten N_L Legendre-Koeffizienten
- Approximation von f_s durch

$$f_s(x, v, t) \approx f_s^L(x, v, t) = \sum_{n=0}^{N_L-1} C_s^n(x, t) \Phi_n(v)$$

- C_s^n weiterhin für $n \leq N_L - 1$ durch die partielle Differentialgleichung gegeben
- Eigenschaften von f_s als numerische Approximation von f_s^L darstellbar
 \Rightarrow Schreiben f_s^L schlicht als f_s

Definiere

- Vektor \mathbf{C} , der alle Koeffizienten C_s^n für $n \in [0, N_L - 1]$ enthält
 $\Rightarrow (\mathbf{C}_s)^n = C_s^n$

- Vektor $\Phi(v) := (\Phi_0(v), \Phi_1(v), \dots, \Phi_{N_L-1}(v))^T$, der sämtliche Werte der transformierten Legendre-Funktionen ausgewertet in v enthält

$$\Rightarrow f_s(x, v, t) = \Phi(v)^T \mathbf{C}_s(x, t)$$

System in nicht-konservativer Vektorform

$$\frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} E (\mathbf{B} \mathbf{C}_s - \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b}) = 0 ,$$

wobei

$$\left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial x} \right)_n = \sigma_{n+1} \frac{\partial C_s^{n+1}}{\partial x} + \sigma_n \frac{\partial C_s^{n-1}}{\partial x} + \bar{\sigma} \frac{\partial C_s^n}{\partial x} ,$$

$$(\mathbf{B} \mathbf{C}_s)_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{n,i} C_s^i \quad \text{und} \quad (\delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b})_n = \delta_v [f_s \Phi_n]_{v_a}^{v_b} .$$

- Matrix \mathbf{A} ist konstant

$$\Rightarrow \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \mathbf{C}_s) \text{ mit } (\mathbf{A} \mathbf{C}_s)_n = \sigma_{n+1} C_s^{n+1} + \sigma_n C_s^{n-1} + \bar{\sigma} C_s^n$$

System in konservativer Vektorform

$$\frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \mathbf{C}_s) - \frac{q_s}{m_s} E (\mathbf{B} \mathbf{C}_s - \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b}) = 0$$

Transformation durch Verwendung der Fourierreihe

- Erweitere jeden Legendre-Koeffizienten C_s^n über die ersten $2N_F + 1$ Funktionen der Fourierbasis $\psi_k(x) = \exp(\frac{2\pi i}{L} kx)$ für $k \in [-N_F, N_F]$ durch

$$C_s^n(x, t) = \sum_{k=-N_F}^{N_F} C_s^{n,k}(t) \psi_k(x)$$

- Funktionen der Fourierbasis genügen der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^L \psi_k(x) \psi_{k'}(x) dx = L \delta_{k+k', 0}$$

Durch Einsetzen in die partielle DGL und unter Ausnutzen der Orthogonalitätsrelation erhalten wir folgendes System für die Koeffizienten $C_s^{n,k}$:

$$\frac{dC_s^{n,k}}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L}k\right)(\sigma_{n+1}C_s^{n+1,k} + \sigma_n C_s^{n-1,k} + \bar{\sigma}C_s^{n,k}) - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{n,i} C_s^i - \delta_v [f_s \Phi_n]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = 0 \quad \forall k \in [-N_F, N_F]$$

Notation:

- $n \in \{0, \dots, N_L - 1\}$ und $-N_F \leq k \leq N_F$
- $*$ das Faltungsintegral
- $[\cdot]_k$ der k -te Modalwert der Fourierreihe des enthaltenen Arguments
- Beispiel: $[g * h]_k = \sum_{k'=-N_F}^{N_F} g_{k'} h_{k-k'}$ der k -te Modalwert der Fourierreihe von $g * h$ mit den Fourierkoeffizienten $(g_k), (h_k)$

- analoge Transformation für das elektrische Feld:

$$E(x, t) = \sum_{k=-N_F}^{N_F} E_k(t) \psi_k(x)$$

- Einsetzen in die Poisson-Gleichung:

$$\epsilon_0 \left(\frac{2\pi i}{L} k \right) E_k(t) = (v_b - v_a) \sum_{s \in \{e, i\}} q_s C_s^{0, k}(t)$$

- Für $k = 0$ folgt: $\sum_{s \in \{e, i\}} q_s C_s^{0, 0}(t) = 0$

⇒ Anlehnung an die Neutralität des Plasmas: Gesamtheit an elektrischer Ladung innerhalb des Systems identisch 0

⇒ 0-ter Modalwert der Fourierreihe bezüglich des elektrischen Feldes ebenfalls identisch 0: $L \cdot E_0(t) = \int_0^L E(x, t) dx = 0$

Vereinfachung der Notation

Definiere den Vektor \mathbf{C}_s^k , welcher die k -ten Fourierkoeffizienten $C_s^{n,k}$ für alle Legendre-Koeffizienten $n \in [0, N_L - 1]$ enthält

$$\Rightarrow (\mathbf{C}_s^k)_n = C_s^{n,k}$$

Mit dieser Notation erhalten wir für unser System in Vektorschreibweise

$$\frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L}k\right)\mathbf{A}\mathbf{C}_s^k - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\mathbf{B}\mathbf{C}_s - \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = 0 ,$$

wobei

$$(\mathbf{A}\mathbf{C}_s^k)_n = \sigma_{n+1} C_s^{n+1,k} + \sigma_n C_s^{n-1,k} + \bar{\sigma} C_s^{n,k} , \quad (\mathbf{B}\mathbf{C}_s^k)_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{n,i} C_s^{i,k}$$

und

$$(\delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b})_n = \delta_v [f_s \Phi_n]_{v_a}^{v_b} := \frac{f_s(x, v_b, t) \Phi_n(v_b) - f_s(x, v_a, t) \Phi_n(v_a)}{v_b - v_a} .$$

- Einführen eines Strafterms $\mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k)$ zur Verhinderung von Filamentbildung
- $\mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k) := \mathbf{D}_s^\nu \mathbf{C}_s^k$, wobei \mathbf{D}_s^ν Diagonalmatrix, mit n -tem Diagonaleintrag

$$D_s^n := \mathbf{D}_s^{\nu|nn} = -\nu_s \frac{n(n-1)(n-2)}{(N_L-1)(N_L-2)(N_L-3)} \text{ für } n \geq 0$$

- ν_s ein partikelspezies-spezifischer Streukoeffizient

System mit Kollisionsoperator

$$\frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L} k\right) \mathbf{A} \mathbf{C}_s^k - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\mathbf{B} \mathbf{C}_s - \delta_\nu [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = \mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k)$$

- $\mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k)$ schwächt dabei die höchsten Modalwerte bei der Legendre-Polynom-Darstellung ab und reduziert so die Filamentbildung
- $\mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k) = 0$ für $n = 0, 1, 2 \Rightarrow$ Spektralmethode beeinflusst nicht die Erhaltungsgesetze

Crank-Nicolson Diskretisierung

- Definiere mit Δt einen Zeitschritt und setze τ als Zeitindex
 \Rightarrow durch die Indizierung mit τ wird jede Größe in der Zeit betrachtet
- Beispiel:
 $t_\tau = \tau \Delta t$, $E_\tau = E(\cdot, t_\tau)$, $f_{s,\tau} = f_s(\cdot, \cdot, t_\tau)$ und $C_{s,\tau}^{n,k} = C_s^{n,k}(t_\tau)$
- Vorgehensweise anwenden auf das System für die Legendre-Fourier Koeffizienten $C_s^{n,k}(t) \Rightarrow$ Diskretisierung unseres Systems in der Zeit

- Anwendungsbeispiel:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, u)$ mit $u(i\Delta x, n\Delta t) = u_i^n$
 $\Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F_i^{n+1}(t, u) + F_i^n(t, u) \right)$

- Hier:

$$\frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L} k \right) \mathbf{A} \mathbf{C}_s^k - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\mathbf{B} \mathbf{C}_s - \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = \mathcal{C}(\mathbf{C}_s^k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} = F(t, \mathbf{C}_s^k)$$

Damit erhalten wir aus der Vlasov-Gleichung für jede Spezies und jeden Legendre-Fourier Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{s,\tau+1}^{n,k} - C_{s,\tau}^{n,k}}{\Delta t} + \frac{\pi i}{L} k \left(\sigma_{n+1} (C_{s,\tau+1}^{n+1,k} + C_{s,\tau}^{n+1,k}) + \sigma_n (C_{s,\tau+1}^{n-1,k} + C_{s,\tau}^{n-1,k}) \right. \\ & \quad \left. + \bar{\sigma} (C_{s,\tau+1}^{n,k} + C_{s,\tau}^{n,k}) \right) \\ & - \frac{q_s}{4m_s} \left[(E_{\tau+1} + E_\tau) * \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{n,i} (C_{s,\tau+1}^i + C_{s,\tau}^i) - \gamma_s \delta_V [(f_{s,\tau+1} + f_{s,\tau}) \Phi_n]_{V_a}^{V_b} \right) \right]_k \\ & = \mathcal{C} \left(\frac{1}{2} C_{s,\tau+1}^{n,k} + \frac{1}{2} C_{s,\tau}^{n,k} \right) \end{aligned}$$

⇒ diskretisiertes System für die Legendre-Fourier Koeffizienten
 $C_s^{n,k}(t)$

L^2 -Stabilität des Verfahrens

- Verteilungsfunktion f_s genügt insbesondere der L^p -Stabilität für $p \geq 1$
- Prüfen durch:
 - Multiplikation der Vlasov-Gleichung mit $p \cdot f_s(x, v, t)^{p-1}$
 - Anschließender Integration über den Phasenraum $[0, L] \times [v_a, v_b]$
 - Mit der Annahme $f_s(x, v_a, t) = 0 = f_s(x, v_b, t)$ erhalten wir dann durch Nachrechnen sofort $\frac{d}{dt} \|f_s(\cdot, \cdot, t)\|_{L^p} = 0$
 ⇒ L^p -Stabilität
- Für $p = 2$ erhalten wir also L^2 -Stabilität der Spektralmethode: $\|f_s(\cdot, \cdot, t)\|_{L^2} \leq \|f_s(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2}$
- Es gilt noch die L^2 -Stabilität der Legendre-Fourier Methode nachzuprüfen

- L^2 -Stabilität der Legendre-Fourier Methode hängt von dem Verhalten von f_s an den Rändern des Geschwindigkeitsintervalls, also für $v = v_a$ und $v = v_b$, ab

Die Koeffizienten der Legendre-Fourier Zerlegung besitzen folgende Eigenschaft:

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{N_L-1} \sum_{k=-N_F}^{N_F} |C_s^{n,k}(t)|^2 = -\frac{q_s}{m_s} \left[E * \delta_v [(f_s)^2]_{v_a}^{v_b} \right]_0 - 2 \sum_{n=0}^{N_L-1} |D_s^n| \sum_{k=-N_F}^{N_F} |C_s^{n,k}(t)|^2$$

- Falls $f_s(x, v_a, t) = 0 = f_s(x, v_b, t)$ erfüllt ist, folgt aus dem Beweis obiger Aussage L^2 -Stabilität
- Im Allgemeinen gilt aber $f_s(x, v_a, t) \neq 0 \neq f_s(x, v_b, t)$, da die Legendre-Polynome auf dem gesamten Definitionsbereich definiert wurden und an den Rändern für $v = v_a$ und $v = v_b$ ungleich 0 sind
 \Rightarrow Möglichkeit numerischer Instabilität
- Lösung: Randbedingung $f_s(x, v_a, t) = 0 = f_s(x, v_b, t)$ in schwacher Form durch den Strafterm γ_s einführen:

$$\frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L}k\right)\mathbf{A}\mathbf{C}_s^k - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\mathbf{B}\mathbf{C}_s - \gamma_s \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = \mathbf{D}_\nu \mathbf{C}_s^k$$

- Hinreichend gute Wahl von γ_s setzt den numerische Instabilität verursachenden Term identisch 0

L^2 -Stabilität durch Strafterm

Die modifizierte Version der Legendre-Fourier Methode zur Lösung des Vlasov-Poisson Systems ist L^2 -stabil für den Strafterm $\gamma_s = \frac{1}{2}$ und alle $\nu_s \geq 0$. Die Koeffizienten der Legendre-Fourier Zerlegung weisen dabei die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{N_L-1} \sum_{k=-N_F}^{N_F} |C_s^{n,k}(t)|^2 = -2 \sum_{n=0}^{N_L-1} D_s^n \sum_{k=-N_F}^{N_F} |C_s^{n,k}(t)|^2$$

auf.

- Unerwünschte Eigenschaft: γ_s stört die Erhaltungsgesetze, da γ_s die ersten drei Legendre-Modalwerte beeinflusst
- Lösung: Definiere neuen Strafterm über die Diagonalmatrix $\mathbf{D}_{\gamma_s} := \text{diag}(0, 0, 0, \gamma_s, \dots, \gamma_s)$ und erhalte so das modifizierte System

$$\frac{d\mathbf{C}_s^k}{dt} + \left(\frac{2\pi i}{L}k\right)\mathbf{A}\mathbf{C}_s^k - \frac{q_s}{m_s} \left[E * \left(\mathbf{B}\mathbf{C}_s - \mathbf{D}_{\gamma_s} \delta_v [f_s \Phi]_{v_a}^{v_b} \right) \right]_k = \mathbf{D}_v \mathbf{C}_s^k$$

- Dieses modifizierte System mit neuem Strafterm ist erneut L^2 -stabil

Auswirkungen auf die Erhaltungsgesetze

- Vlasov-Poisson Modell im nicht-diskretisierten Zustand:
Erhaltungsgesetze bezüglich der Masse, des Impulses und der Energie bleiben unverändert
- Die zuvor präsentierte Diskretisierung mittels der Legendre-Fourier Spektralmethode überträgt diese Erhaltungsgesetze auf das diskretisierte Modell
- Die einzelnen Erhaltungsgesetze stehen dabei jedoch in Abhängigkeit zu den zeitlichen Veränderungen der Legendre-Fourier-Koeffizienten $C_s^{n,k}$ für $N = 0, 1, 2$ und $k = 0$

Massenerhaltung

- Unter Verwendung der Legendre-Fourier Methode für f_s und den Orthogonalitätsrelationen gilt für die Gesamtmasse der Partikelspezies s :

$$M_s(t) = m_s \int_0^L \int_{v_a}^{v_b} f_s(x, v, t) dv dx = m_s (v_b - v_a) L C_s^{0,0}(t)$$

- Im diskretisierten Modell folgt

$$M_s(t_{\tau+1}) - M_s(t_\tau) = m_s (v_b - v_a) L \left(C_s^{0,0}(t_{\tau+1}) - C_s^{0,0}(t_\tau) \right) = \Delta t \mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{0,0}$$

- Die Veränderung der Masse wird zwischen den Zeitschritten $t_{\tau+1}$ und t_τ durch den Randterm $\mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{0,0}$ ausgeglichen

Impulserhaltung

- Der Gesamtimpuls einer Partikelspezies s ist definiert durch:

$$\begin{aligned} P_s(t) &= m_s \int_0^L \int_{v_a}^{v_b} v f_s(x, v, t) dv dx \\ &= m_s (v_b - v_a) L \sigma_1 C_s^{1,0} + \bar{\sigma} M_s(t) \end{aligned}$$

- Der Gesamtimpuls des Plasmas ergibt sich durch die Aufsummierung

$$P(t) = \sum_{s \in \{e, i\}} P_s(t)$$

- Im diskretisierten Modell folgt für die Impulserhaltung

$$\begin{aligned} P(t_{\tau+1}) - P(t_\tau) &= \sum_{s \in \{e, i\}} \left(P_s(t_{\tau+1}) - P_s(t_\tau) \right) \\ &= \Delta t \left(\sigma_1 \mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{1,0} + \bar{\sigma} \mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{0,0} \right), \end{aligned}$$

- Die Veränderung des Gesamtimpulses wird in den Zeitschritten $t_{\tau+1}$ und t_τ durch die Randterme $\mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{1,0}$ und $\mathcal{B}_{s;\tau,\tau+1}^{0,0}$ ausgeglichen

Energieerhaltung

- Die Gesamtenergie innerhalb des Plasmas ergibt sich durch:

$$\mathcal{E}^{\text{total}}(t) = \sum_{s \in \{e, i\}} \mathcal{E}_s^{\text{total}}(t) = \sum_{s \in \{e, i\}} \mathcal{E}_s^{\text{kin}}(t) + \mathcal{E}_s^{\text{pot}}(t), \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s^{\text{kin}}(t) + \mathcal{E}_s^{\text{pot}}(t) &= \frac{m_s}{2} \int_0^L \int_{v_a}^{v_b} v^2 f_s(x, v, t) dv dx + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^L E(x, t)^2 dx \\ &= \frac{m_s}{2} (v_b - v_a) L \left(\sigma_2 \sigma_1 C_s^{2,0}(t) + 2\sigma_1 \bar{\sigma} C_s^{1,0}(t) + (\sigma_1^2 + \sigma_0^2 + \bar{\sigma}^2) C_s^{0,0}(t) \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^L E(x, t)^2 dx \end{aligned}$$

- Für das diskretisierte Modell erhalten wir

$$\mathcal{E}^{\text{total}}(t_{\tau+1}) - \mathcal{E}^{\text{total}}(t_{\tau}) = \Delta t \sum_{s \in \{e, i\}} \mathcal{B}_{s; \tau, \tau+1}^{\text{kin}} + \Delta t \mathcal{B}_{\tau, \tau+1}^{\text{pot}}$$

- Die Veränderung der Gesamtenergie zwischen den Zeitschritten $t_{\tau+1}$ und t_{τ} wird durch die Kombination eines kinetischen Randterms $\mathcal{B}_{s; \tau, \tau+1}^{\text{kin}}$ und eines potentiellen Randterms $\mathcal{B}_{\tau, \tau+1}^{\text{pot}}$ ausgeglichen

Numerische Auswertung an Beispielen

Wir betrachten 3 klassische Probleme der Plasmaphysik:

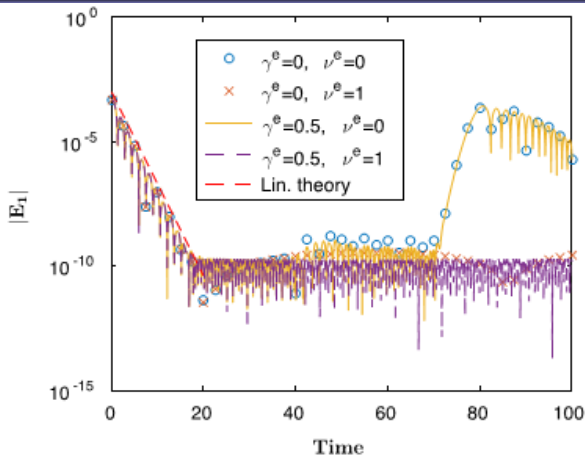
- Landau Dämpfung
- Zwei-Strom Instabilität
- Ionenschallwelle

→ dienen als Maßstab zur numerischen Einordnung unseres Modells

- Simulation mit:
 - $[0, T]$ als Zeitintervall mit $T = 100$ und Zeitschritten $\Delta t = 0.05$
 - $N_L = 201$ Legendre-Modalwerte und $2N_F + 1 = 51$ Fourier-Modalwerte
 - Phasenraum $[0, L] \times [v_a, v_b]$ mit Rändern $L = 2\pi$ und $v_b = -v_a = 5$
- Implementierung der einzelnen Probleme nicht weiter betrachtet
- Ionen bilden feste Hintergrundladung bei Landau Dämpfung und Zwei-Strom Instabilität, d.h. $\rho_i(x, t) = 1$

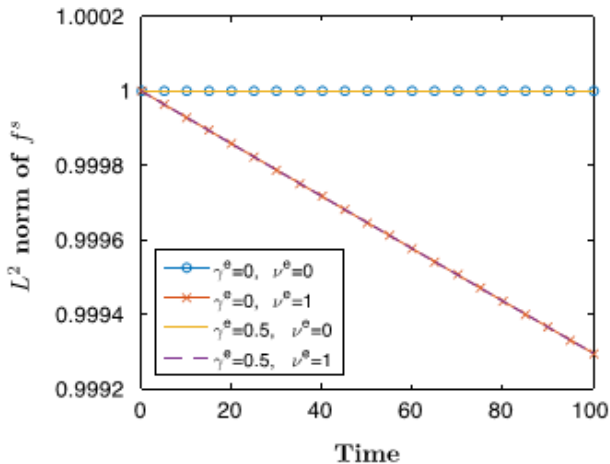
Landau Dämpfung („Landau damping“):

- bezeichnet die Dämpfung von (Längs-)Druckwellen in Plasmen
 - Innerhalb des Plasmas: schnelle und langsame geladene Teilchen
 - Unter bestimmten physik. Voraussetzungen: Anzahl langsamer Teilchen $>$ Anzahl schneller Teilchen
- ⇒ langsame Teilchen nehmen mehr Energie aus der Welle auf, als die schnellen Teilchen an die Welle abgeben
- ⇒ Welle wird gedämpft
(in unserem Fall: Abschwächung des elektrischen Feldes)



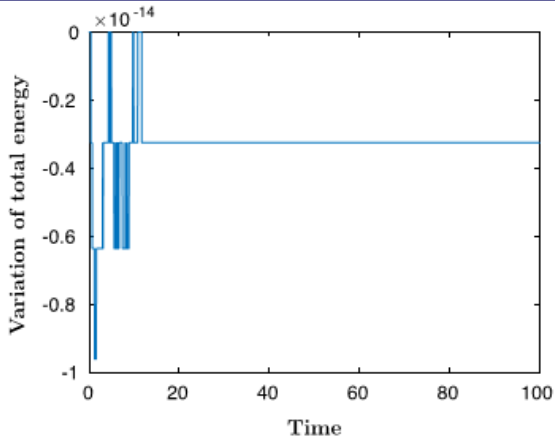
Erster Fourier-Modalwert bezüglich des elektrischen Feldes für unterschiedliche Kombinationen aus Strafterm γ^e und den Koeffizienten ν^e des Kollisionsoperators

- stabilisiert sich nach Abschwächung für $t > 20$ um den Wert 10^{-10}
- Übereinstimmung mit Landau damping Theorie



L^2 -Norm von f_s konstant für $\nu^e = 0$. Abnehmende L^2 -Norm für $\nu^e = 1$, da dann der Kollisionsoperator dominiert.

⇒ L^2 -Stabilität des numerischen Verfahrens



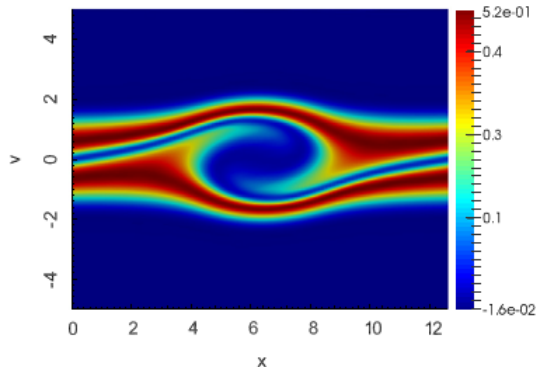
Die rel. Differenz der Gesamtenergie erfüllt: $\left\| \frac{\mathcal{E}^{\text{total}}(t_\tau) - \mathcal{E}^{\text{total}}(0)}{\mathcal{E}^{\text{total}}(0)} \right\| \leq 10^{-14}$

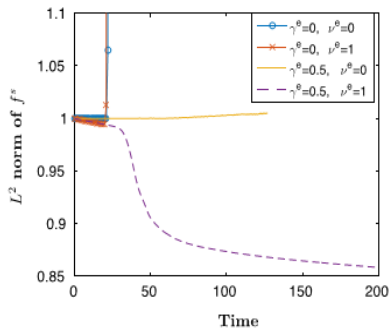
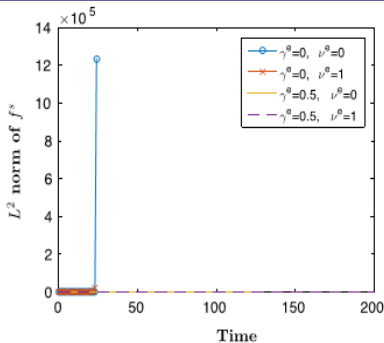
- Die relative Differenz bzgl. der Masse $\frac{M(t_\tau) - M(0)}{M(0)}$ und die Differenz des Impulses $P(t_\tau) - P(0)$ sind sogar identisch 0 für jeden diskreten Zeitschritt $0 \leq t_\tau \leq 200$

⇒ Legendre-Fourier Spektralmethode erhält die Erhaltungsgesetze

Zwei-Strom Instabilität („two-stream instability“)

- betrachtet den Fall, dass zwei Anhäufungen von Partikeln unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten in entgegengesetzte Richtungen besitzen
- ⇒ Begriff: two-stream („Zwei Strömungen“)

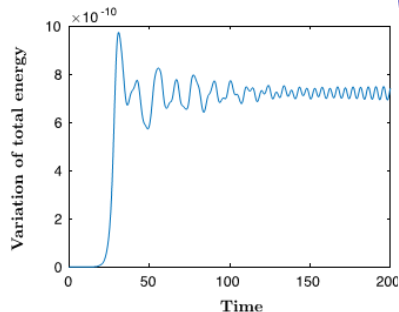
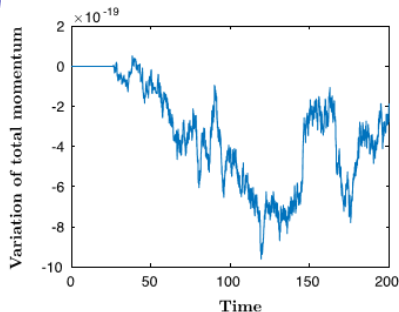




Links: Die zeitliche Entwicklung der L^2 -Norm
 Rechts: Zoom um den Wert 1

- L^2 -Norm wächst unbeschränkt für $\gamma^e = 0$
 \Rightarrow Verfahren numerisch instabil
 - L^2 -Norm ist jedoch beschränkt für $\gamma^e = 0.5$
 \Rightarrow Verfahren ist numerisch stabil
- \Rightarrow Auswirkungen des Strafterms γ^e sind hier enorm wichtig

Zwei-Strom Instabilität



Die Differenz des Gesamtimpulses erfüllt: $\|P(t_\tau) - P(0)\| \leq 9,9 \times 10^{-19}$

Die rel. Differenz der Gesamtenergie erfüllt:

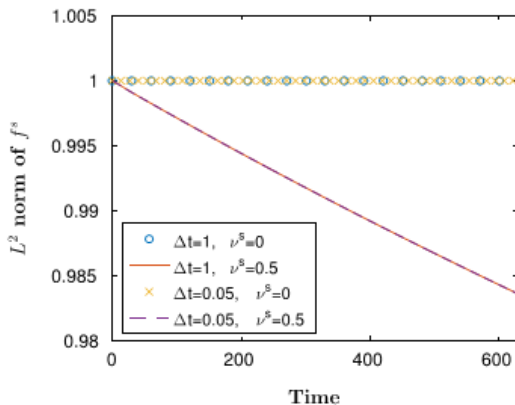
$$\left\| \frac{\mathcal{E}^{\text{total}}(t_\tau) - \mathcal{E}^{\text{total}}(0)}{\mathcal{E}^{\text{total}}(0)} \right\| \leq 9,9 \times 10^{-10}$$

- Die Differenz bzgl. der Gesamtmasse wurde hier nicht betrachtet, geht aber gegen 0

⇒ Legendre-Fourier Spektralmethode erhält die Erhaltungsgesetze ziemlich gut

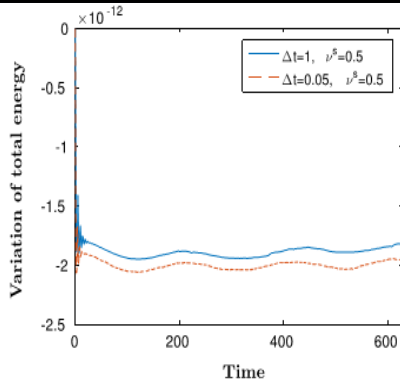
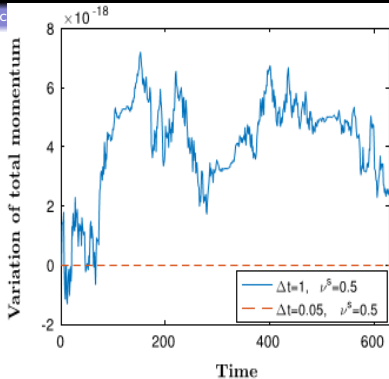
Ionenschallwelle („ion acoustic wave“):

- bezeichnet eine Art der Oszillation von Längswellen bezüglich der im Plasma enthaltenen Ionen und Elektronen
- betrifft sowohl die eher langsamen Ionen als auch die schnelleren Elektronen



Die zeitliche Entwicklung der L^2 -Norm konstant für $\nu^e = 0$. Abnehmende L^2 -Norm für $\nu^e = 1$, da dann der Kollisionsoperator dominiert.

⇒ L^2 -Stabilität des numerischen Verfahrens (in Analogie zum Problem: Landau-damping)



Die Differenz des Gesamtimpulses erfüllt: $\|P(t_\tau) - P(0)\| \leq 8 \times 10^{-18}$

Die rel. Differenz der Gesamtenergie erfüllt:

$$\left\| \frac{\mathcal{E}^{\text{total}}(t_\tau) - \mathcal{E}^{\text{total}}(0)}{\mathcal{E}^{\text{total}}(0)} \right\| \leq 2,5 \times 10^{-12}$$

- Differenz bzgl. des Impulses wird dabei noch durch den Zeitschritt kontrolliert, gilt jedoch nicht für die Differenz bzgl. der Energie
 - Die Differenz bzgl. der Gesamtasse $M(t_\tau) - M(0) = 0$
- ⇒ Legendre-Fourier Spektralmethode erhält die Erhaltungsgesetze

Zusammenfassung

Fazit:

- Vlasov-Poisson System
- Legendre-Fourier Spektralmethode
 - Diskretisierung in der Geschwindigkeitsvariable durch Legendre-Polynome
 - Diskretisierung in der Ortsvariable mit Fourierreihen
 - Diskretisierung in der Zeit über Crank-Nicolson-Verfahren
- L^2 -Stabilität und Auswirkung auf die Erhaltungsgesetze
- Betrachtung numerischer Beispiele zur Auswertung

Ausblick:

- Steigende Komplexität für $x, v \in \mathbb{R}^3$
- Frage: Umsetzung und Effektivität in höherer Dimension?