Schwache Lösungen des Vlasov-Maxwell Systems

Lukas Vierus

Universität des Saarlandes

15. Januar 2018

Gliederung

Seien $f_0 \geq 0$, E_0 und B_0 bekannte Daten zum Zeitpunkt $t = 0$.
Wir betrachten das modifizierte Vlasov-Maxwell-System

$$f_t + v \cdot \nabla_x f + (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_t E &= c\nabla \times B - j^\epsilon & \qquad \nabla \cdot E &= \rho \\ \partial_t B &= -c\nabla \times E & \qquad \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\rho = 4\pi \int f \,\mathrm{d}v \text{ und } j = 4\pi \int v f \,\mathrm{d}v$$

und $j^\epsilon = \delta_\epsilon * j$ mit δ_ϵ dem Standard-Friedrichs-Mollifier.

Ein AWP für dieses System besitzt eine global glatte Lösung bei festem $\epsilon > 0$.
Sei also (f^n, E^n, B^n) eine solche approximative Lösung bzgl. δ_n.
Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint (f^n)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint |v|^2 f^n \mathrm{d}v\mathrm{d}x + \int (|E|^2 + |B|^2)\mathrm{d}x \right) = 0.$$

Unter der Annahme $f^n(0,x,v) \geq 0$ haben wir wegen schwacher Kompaktheit eine Teilfolge (n_k), so dass

$$E^{n_k} \rightharpoonup E, \quad B^{n_k} \rightharpoonup B \quad in \quad L^2((0,T) \times \mathbb{R}^3);$$

$$f^{n_k} \rightharpoonup f \quad in \quad L^2((0,T) \times \mathbb{R}^3 \times B_R).$$

Folglich $\partial_t f^n \rightharpoonup \partial_t f$ in $\mathcal{D}'((0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times B_R)$.

Für die Konvergenz des nichtlinearen Terms betrachten wir für $\phi \in \mathcal{D}((0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}&\iiint \phi(E^n + v \times B^n) \cdot \nabla_v f^n \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = -&\iiint \nabla_v \phi \cdot (E^n + v \times B^n) f^n \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Definiert man $\phi = \tilde{\phi}(t,x)\Psi(v)$, benötigt man die Konvergenz von

$$\iint \tilde{\phi}(t,x)E^n(t,x) \cdot \int \psi(v) f^n \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad \text{für} \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Dabei sei $\psi = \nabla_v \Psi$.

Aus starker Konvergenz von

$$\int f_n(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \quad \in \quad L^2((0,T)\times B_R)$$

für beliebige T, R, folgt die vorherige Aussage.

Wir wollen nun die Konvergenz $j^n \to j$ in $\mathcal{D}'$ von der starken L^1-Konvergenz

$$\int f_n(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \quad \in \quad L^1((0,T)\times B_R)$$

ableiten, wobei ψ stetig sei mit $\psi(v) = o(|v|^2)$ für $|v| \to \infty$.

Im Folgenden wird u.a. gezeigt:
Ist $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ eine Lösung von

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \tag{1}$$

dann gilt

$$\int f(t, x, v)\psi(v)\mathrm{d}v \in H^{1/2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$$

für ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Durch diese gemittelte Geschwindigkeit verbessert sich also die Regularität in den Raum- und Zeitvariablen.

Für das Vlasov-Maxwell System verlangen wir, dass g eine Ableitung bzgl. v ist.

Dann lässt sich für

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} D_v^\alpha g_\alpha$$

mit $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ die Gleichung aus (1) verallgemeinern zu

$$\int f(t,x,v)\psi(v)\mathrm{d}v \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2(1+m)}.$$

Satz 1

Sei $m \in \mathbb{N}, \quad R \in (0,\infty), \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R)$.
Ferner erfülle $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times B_R)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \sum_{|\alpha| \leq m} D_v^\alpha g_\alpha \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times B_R),$$

wobei $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times B_R)$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$.
Dann existiert eine Konstante $c = c(m, R, \psi) > 0$, so dass

$$\int_{B_R} f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2(1+m)}$$

und

$$\left|\left| \int_{B_R} f\psi \ \mathrm{d}v \right|\right|_{H^s} \leq c\left[||f||_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times B_R)} + \sum_{|\alpha|\leq m} ||g_\alpha||_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times B_R)} \right].$$

Im Folgenden wird nur der Fall $m = 1$ bewiesen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{B_R} f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \right\|^2_{H^{1/4}} \\
\leq &\iint \left| \int \hat{f}(\tau,\xi,v)\psi(v)\mathrm{d}v \right|^2 \left(1 + |\tau|^{1/2} + |\xi|^{1/2}\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \\
\leq &||\psi||_2^2 ||\hat{f}||_2^2 + \underbrace{\iint \left| \int \hat{f}(\tau,\xi,v)\psi(v)\mathrm{d}v \right|^2 \left(|\tau|^{1/2} + |\xi|^{1/2}\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau}_{=:J}.
\end{aligned}
$$

Wir definieren

$$I(\tau,\xi) = \int \hat{f}(\tau,\xi,v)\psi(v)\mathrm{d}v \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2}$$

Hierfür lässt sich folgende Abschätzung beweisen:

$$|I| \leq c(||\hat{f}(\tau,\xi,\cdot)||_2 + ||\hat{g}(\tau,\xi,\cdot)||_2)$$
$$\left(|\xi|^{-1/2}\chi_{|\tau|\leq R|\xi|+2} + \frac{1+|\xi|}{\tau^2 - R^2|\xi|^2}\chi_{|\tau|>R|\xi|+2}\right)^{1/2}.$$

Schreibe $J = J_1 + \ldots + J_5$, wobei

$$J_1 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\tau|^{1/2} \chi_{|\xi|>1} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau,$$

$$J_2 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\tau|^{1/2} \chi_{|\xi|\le 1} \chi_{|\tau|>R+2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau,$$

$$J_3 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\tau|^{1/2} \chi_{|\xi|\le 1} \chi_{|\tau|\le R+2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau,$$

$$J_4 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\xi|^{1/2} \chi_{|\xi|>1} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau,$$

$$J_5 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\xi|^{1/2} \chi_{|\xi|\le 1} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.$$

Definiere $\Phi(\tau,\xi) = ||\hat{f}(\tau,\xi,\cdot)||_2 + ||\hat{g}(\tau,\xi,\cdot)||_2$ und erhalte

$$J_1 \leq b_R \iint \Phi^2(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

$$J_2 \leq c_R \iint \Phi^2(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

und entsprechend

$$J_4 \leq d_R \iint \Phi^2(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

Bei J_3 liefert eine direkte Rechnung

$$\begin{aligned}
|J_3| &= \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\tau|^{1/2} \chi_{|\xi|\leq 1} \chi_{|\tau|\leq R+2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \\
&\leq (R+2)^{1/2} \iint \left| \int \hat{f}(\tau,\xi,v)\psi(v)\mathrm{d}v \right|^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \\
&\leq (R+2)^{1/2} ||\psi||_2^2 ||\hat{f}||_2^2 \\
&\leq c||\hat{f}||_2^2.
\end{aligned}$$

Zum Schluss schreiben wir analog zu J_3

$$J_5 = \iint |I(\tau,\xi)|^2 |\xi|^{1/2} \chi_{|\xi|\leq 1} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \leq c||\hat{f}||_2^2.$$

Fügt man alle Terme zusammen, erhält man schließlich:

$$\Big\| \int_{B_R} f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \Big\|_{H^{1/4}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \leq c(||\hat{f}||_2^2 + ||\hat{g}||_2^2)^{1/2}.$$

Satz 2

$$f^n \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$
$$E^n, B^n \in C^0((0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$$

sei eine Lösung des modifizierten Vlasov-Maxwell-Systems, so dass

- $f^n \geq 0$ für alle n,
- $\int\int (f^n)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x \leq c_2$ für alle n,
- $\int\int |v|^2 f^n \mathrm{d}v\mathrm{d}x + \int(|E^n|^2 + |B^n|^2)\mathrm{d}x \leq c_3$ für alle n.

Weiter sei $T > 0$ beliebig und es gelte $f^n \rightharpoonup f$ in $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ für eine Teilfolge (n_k). Für $\psi \in C^0(\mathbb{R}^3)$ gelte $|\psi(v)| = o(|v|^2)$ für $|v| \to \infty$. Dann gilt für jedes $S < \infty$:

$$\int f^{n_k}(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \text{ in } L^1((0,T) \times B_S).$$

Ohne Einschränkung sei $\iint f|v|^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x \leq c_3$, also

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{B_S} \int f|\psi| \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_{B_S} \int_{B_1} f|\psi| \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_{B_S} \int_{B_1^c} f \frac{|\psi|}{|v|^2} |v|^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{|v|\leq 1} |\psi(v)| ||f||_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} \cdot cT^{1/2}|B_S|^{1/2} \\
&\qquad + \sup_{|v|\geq 1} \frac{|\psi(v)|}{|v|^2} \cdot c_3 T \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Mit dem Satz von Fubini ist also
$\int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \in L^1((0,T)\times B_S)$.

Schritt 1

Man zeigt mit Hilfe von Satz 1

$$\int f^{n_k}(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \text{ in } L^1((0,T),B_S)$$

für den Spezialfall $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und eine Teilfolge von f^n beschränkt in $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$.

Schritt 2

Man zeigt, dass für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ eine Folge ψ_m mit $||\psi_m - \psi||_2 \to 0$ existiert, sodass für festes T und S

$$\int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \psi_m \, \mathrm{d}v - \int f \psi_m \, \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \tag{3}$$

gegen 0 konvergiert.

Schritt 3

Sei $\psi \in C_0^0(\mathbb{R}^3)$. Wähle eine Folge $(\psi_m)_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit $||\psi_m - \psi||_2 \to 0$, und T, S fest.

Nach Schritt 2 existiert eine Teilfolge, sodass für jedes m gilt

$$\int f^n \psi_m \mathrm{d}v \overset{n\to\infty}{\to} \int f \psi_m \mathrm{d}v \quad \text{in } L^1((0,T)\times B_S).$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \psi \mathrm{d}v - \int f \psi \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leq &\int_0^T \int_{B_S} \int f^n |\psi - \psi_m| \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \psi_m \mathrm{d}v - \int f \psi_m \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \int_{B_S} \int f |\psi - \psi_m| \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leq &\, ||f^n||_{L^2((0,T)\times B_S \mathbb{R}^3)} \cdot ||\psi - \psi_m||_2 \cdot c_{T,S} \\
&+ \int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \psi_m \mathrm{d}v - \int f \psi_m \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+ ||f||_{L^2((0,T)\times B_S \times \mathbb{R}^3)} \cdot ||\psi - \psi_m||_2 \cdot c_{T,S}.
\end{aligned}
$$

Schritt 4

Sei nun ψ wie im Satz mit $\psi(|v|) = o(|v|^2),\ |v| \to \infty$. Wähle $(\zeta_M)_M \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit $\zeta_M \equiv 1$ auf $\overline{B_M}$ und $0 \leq \zeta_M \leq 1$.

Nun wenden wir Schritt 3 auf $\zeta_M \psi$ an. Für feste $T, S > 0$ existiert eine Teilfolge f^n, so dass für alle $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int f^n \zeta_M \psi \, \mathrm{d}v \to \int f \zeta_M \psi \, \mathrm{d}v \quad \text{für } n \to \infty$$

in $L^1((0, T) \times B_S)$.

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \psi \mathrm{d}v - \int f \psi \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\
&\leq \sup_n \int_0^T \int_{B_S} \int f^n (1-\zeta_M) |\psi| \mathrm{d}v \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_{B_S} \left| \int f^n \zeta_M \psi \mathrm{d}v - \int f \zeta_M \psi \mathrm{d}v \right| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_{B_S} \int f (1-\zeta_M) |\psi| \mathrm{d}v \mathrm{d}x \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Für den ersten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sup_n \int_0^T \int_{B_S} \int f^n(1-\zeta_M)|\psi| \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leq\ & \sup_{|v|\geq M} \frac{|\psi(v)|}{|v|^2} \cdot \sup_n \int_0^T \int_{B_S} \int_{|v|\geq M} f^n |v|^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leq\ & \sup_{|v|\geq M} \frac{|\psi(v)|}{|v|^2} \cdot c_3 T \\
\to\ & 0 \quad \text{für } M \to \infty
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz gezeigt.

Unter der zusätzlichen Annahme, dass für alle $T, P > 0$

$$\{f^n(t,\cdot,\cdot)^2 : n \in \mathbb{N}, t \in [0,T]\}$$

relativ schwach kompakt in $L^1(B_P \times B_P)$ ist, existiert für alle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ eine Teilfolge (n_k), so dass

$$\int f^{n_k}(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v$$

in $L^2((0,T) \times B_S)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\{(\int f^n(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v)^2\}$ relativ schwach kompakt in $L^1((0,T)\times B_S)$ ist.

Dafür reicht es zu zeigen, dass

1. $\{(\int f^n\psi\mathrm{d}v)^2\}$ ist beschränkt in $L^1((0,T)\times B_S)$.
2. Für alle $\epsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $A \subset (0,T)\times B_S$ mit $|A| \leq \delta$, und für alle n gilt:

$$\int\int_A \left(\int f^n\psi\mathrm{d}v\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \epsilon.$$

Wir haben also die punktweise Konvergenz der Teilfolge

$$\int f^n(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \quad \text{f.s. auf } (0,T)\times B_S,$$

die aus der bereits gezeigten L^1-Konvergenz folgt.

Die starke Konvergenz einer Teilfolge in $L^2((0,T)\times B_S)$ folgt dann mit dem Satz von Vitali.

Folgende Fragen sind noch zu klären:

- Regularität der Anfangsdaten (f_0, E_0, B_0)
- Regularität einer globalen schwachen Lösung (f, E, B) für das Anfangswertproblem des Vlasov-Maxwell-Systems.

Wir nehmen an, dass die Anfangsdaten

$$\iint (1+|v|^2) f_0 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x < \infty$$

erfüllen, wobei $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^6)$ mit $f_0 \geq 0$ und $E_0, B_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Dann finden wir eine Folge $(f_0^n)_n \subset \mathcal{D}$ mit

$$f_0^n \to f_0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^6) \quad \text{und}$$

$$\iint (1+|v|^2)|f_0^n - f_0| \mathrm{d}v\mathrm{d}x \to 0.$$

Des Weiteren approximieren wir die Daten für E und B in $L^2(\mathbb{R}^3)$ durch Folgen $(E_0^n)_n$ und $(B_0^n)_n$.

Dann existiert eine globale schwache Lösung (f, E, B) für das Anfangswertproblem des Vlasov-Maxwell-Systems.

Diese Lösungen sind regulär im Sinne von

$$f \in L^\infty([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^2(\mathbb{R}^6))$$

$$E, B \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^3)).$$

- Satz 1 liefert folgende Abschätzung

$$\left| \int_{B_R} f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \right|_{H^s} \leq c\left[||f||_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times B_R)} + \sum_{|\alpha|\leq m} ||g_\alpha||_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times B_R)} \right]$$

- Satz 2 liefert uns die Konvergenz von

$$\int f^{n_k}(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \to \int f(\cdot,\cdot,v)\psi(v)\mathrm{d}v \text{ in } L^1((0,T)\times B_S).$$

- Die starke Konvergenz einer Teilfolge in $L^2((0,T)\times B_S)$ folgt aus einem Kompaktheitsargument.
- Für die schwachen Lösungen des Vlasov-Maxwell-Systems gilt

$$f \in L^\infty([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^6)\cap L^2(\mathbb{R}^6))$$
$$E, B \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^3)).$$