Interpolation, Collocation & Galerkin Methods

Daniel De Agazio

09.06.2015

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Definition (Restfunktion)

$$R(x; a_0, a_1, \ldots, a_n) = Hu_N - f$$

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$$

Definition (Skalarprodukt)

$$(u, v)_\omega = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx$$

$(N+1)$ Bedingungen die Spektralkoeffizienten a_n zu bestimmen

$$(w_i, R(x, a_0, \dots, a_N))_\omega = 0, \qquad i = 0, \dots, N$$

$w_i(x)$ geeignete Testfunktionen

Beispiele für Testfunktionen $\omega(x)$

Pseudospektral (Kollokation)

$$w_i(x) = \delta(x - x_i)$$

Momentenmethode

$$w_i(x) = x^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

$(x^i, f(x))$ der i-te Moment von $f(x)$

kleinste Quadrate

$$w_i(x) = H\phi_i(x)$$

Definition (Norm)

$$\|R\| = \sqrt{(R, R)}$$

kleinste Quadrate

Satz

Ist $w_i(x) = H\phi_i(x)$, H linear, so gilt:

$$(R, R) \leq (Hv - f, Hv - f)$$

für alle $v(x)$ der Form

$$v(x) = \sum_{n=0}^{N} d_n \phi_n(x), \quad d_n \; beliebig$$

Galerkin Verfahren

$$w_i(x) = \phi_i(x)$$

$\phi_n(x)$ Basisfunktionen

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Nützliche Kombination aus Basisfunktionen sollten eine Reihe von Eigenschaften haben

1. müssen leicht zu berechnen sein
2. Vollständigkeit
   z.b. Fourier-Reihe, Tschebyscheff Polynome, Hermite Funktionen, Kugelflächenfunktionen

Randbedingung homogen: z.b. $u(-1) = u(1) = 0$. Zwei Optionen

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\pm 1) = 0$
2. Basisfunktionen wählen, die die Randbedingungen erfüllen

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. **Skalarprodukt & Orthogonalität**
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Definition (Skalarprodukt)

$f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige Funktionen, $\omega(x)$ Gewichtsfunktion

$$(f,g)_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

Definition (Orthogonalität)

$$(\phi_m, \phi_n)_\omega = \delta_{mn} v_n^2$$

v_n heißen Normalisierungskonstanten

Vorteil der Orthogonalität

$f(x)$ wird dargestellt als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

Das Skalarprodukt von f und ϕ_m ist dann

$$(f, \phi_m)_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\phi_m, \phi_n)_\omega$$

Satz (Skalarprodukt für die Spektralkoeffizienten)

$f(x)$ dargestellt als eine Reihe von orthogonalen Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$$

für a_n gilt

$$a_n = \frac{(\phi_n, f)_\omega}{(\phi_n, \phi_n)_\omega}$$

Definition (Orthonormal)

$\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ Basismenge, $\phi_i,\ i = 1, \ldots, m$ Basisfunktionen

$$(\phi_n, \phi_n)_\omega = 1$$

a_n dargestellt als

$$a_n = (\phi_n, f)_\omega$$

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Satz

$R(x; a_0, \ldots, a_N)$ kann dargestellt werden als

$$R(x; a_0, \ldots, a_N) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(a_0, \ldots, a_N)\phi_n(x)$$

r_n gegeben durch

$$r_n = (R, \phi_n)_\omega$$

- Im folgenden H ein linearer Operator
- $\mathbb{H}$ $(N+1) \times (N+1)$ quadratische Matrix
- $\mathbf{f}$ Spaltenmatrix
- $\mathbf{a}$ Spaltenvektor

$$H_{ij} = (\phi_i, H\phi_j), \qquad i,j = 1,2,\ldots,(N+1)$$

$$f_i = (\phi_i, f), \qquad i = 1,2,\ldots,(N+1)$$

$$\mathbb{H}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$R(x; a_0, a_1, \ldots, a_N) = -f(x) + \sum_{j=0}^{N} a_j H\phi_j$$

Erinnerung

$$F_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n sin(nx)$$

Beispiel 1:

$$u_{xx} - \frac{1}{2}u = -\frac{3}{2}cos(x) - \frac{9}{2}cos(2x)$$

periodische Randbedingungen, Diese Gleichung hat die Form
$Hu = f$
H und f haben die Form

$$H = \partial_{xx} - \frac{1}{2}; \qquad f(x) = -\frac{3}{2}cos(x) - \frac{9}{2}cos(2x)$$

mit der Basis $\{cos(x), cos(2x)\}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} (cos[x], H\, cos[x]) & (cos[x], H\, cos[2x]) \\ (cos[2x], H\, cos[x]) & (cos[2x], H\, cos[2x]) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cos[x], f) \\ (cos[2x], f) \end{pmatrix}$$

wobei

$$(g,h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\ h(x)dx$$

Es gilt:

$$H\ cos(nx) = [cos(nx)]_{xx} - \frac{1}{2}cos(nx) = -[n^2 + \frac{1}{2}]cos(nx),\ \forall n$$

$$(cos[mx], cos[nx]) = \pi\delta_{mn}, \qquad \forall m,n > 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$u(x) = cos(x) + cos(2x)$$

Beispiel 2:

$$u_{xx} + (cos(x) + cos^2(x))u = exp(-1 + cos(x))$$

periodische Randbedingungen. Sei

$$u(x) = a_0 + a_1 cos(x) + a_2 cos(2x) + a_3 cos(3x)$$

$$H = \partial_{xx} + cos(x) + cos^2(x), \quad f(x) = exp(-1 + cos(x))$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -7/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -17/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente sind gegeben durch

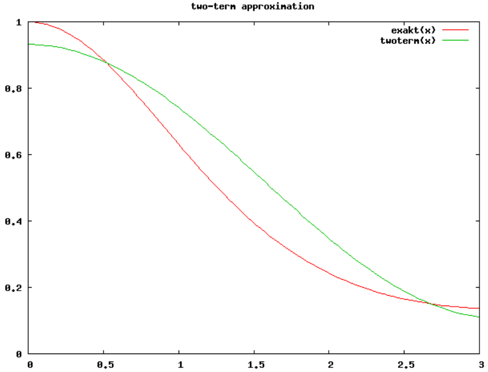
$$H_{ij} = (cos(jx), (-k^2 + cos(x) + cos^2(x))cos(kx))$$

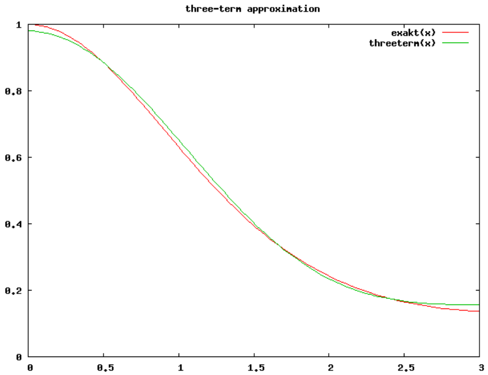
$$f_j = (cos(jx), exp(-1 + cos(x)))$$

n	Exakt	$N=1$		$N=2$	
	a_n	a_n	Errors	a_n	Errors
0	0.4658	0.5190	-0.0532	0.4702	-0.0044
1	0.4158	0.4126	0.0032	0.4159	0.0032
2	0.0998	-	-	0.0976	0.0022
3	0.0163	-	-	-	-
4	0.0020	-	-	-	-

	$[N=1]$	$[N=2]$
E_D	0.0564	0.0098
E_T	0.1181	0.0183
L_∞	0.153	0.021

$E_D = \sum_{n=0}^{N} |a_n^{exact} - a_n^{approx.}|$
$E_T = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$
$L_\infty \; fehler = max_{x\in[-\pi,\pi]}|u(x) - u_N(x)|$


two-term approximation
exakt(x)
twoterm(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


three-term approximation
exakt(x)
threeterm(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Definition (Interpolation)

Es bezeichne P_{N-1} den Interpolanten zu f, der an N Stellen mit f übereinstimmt, also

$$P_{N-1}(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. **Polynom-Interpolation**
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Lineare Interpolation

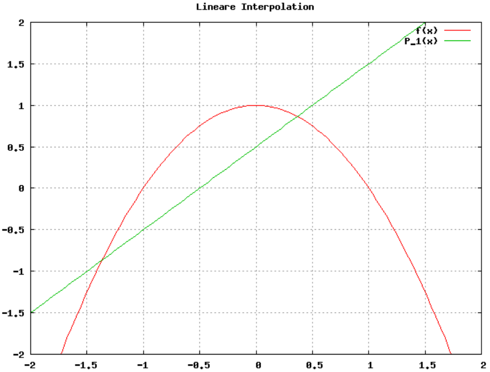
$$f(x) \approx \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \quad [\textit{Lineare Interpolation}]$$

$P_1(x)$ Interpolationspolynom mit ben beiden Bedingungen

$$P_1(x_0) = f(x_0) \qquad ; \qquad P_1(x_1) = f(x_1)$$

Lineare Interpolation ist nicht sehr genau, aber man kann diese Idee zu höherer Ordnung erweitern

Lineare Interpolation



quadratische Interpolation

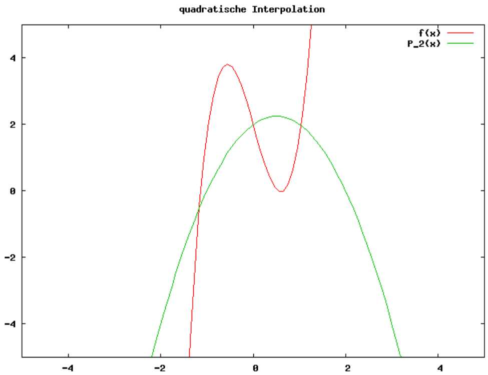
quadratisches Polynom P_2(x) approximert f(x) wenn es die drei Bedingungen erfüllt

$$P_2(x_0) = f(x_0) \quad ; \quad P_2(x_1) = f(x_1) \quad ; \quad P_2(x_2) = f(x_2)$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Quadratische Interpolation



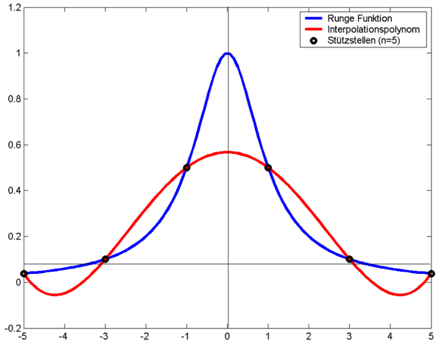
Lagrange Interpolation

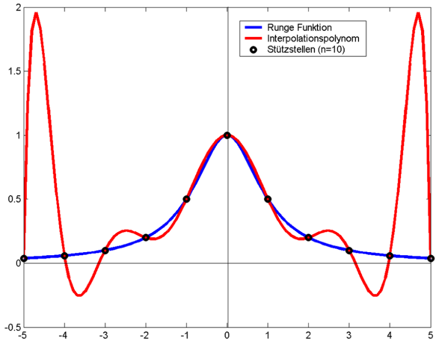
$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) C_i(x) \quad [\textit{Lagrange Interpolations Formel}]$$

C_i(x) Cardinal Funktionen, die die bedingungen erfüllen

$$C_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$C_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad [\textit{Cardinal Funktionen}]$$


Runge Funktion
Interpolationspolynom
Stützstellen (n=5)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Runge Funktion
Interpolationspolynom
Stützstellen (n=10)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Erinnerung

$$T_n(t) = cos(n\ arccos(t))$$

Satz (Cauchy Interpolation Error Theorem)

$f(x)$ $(N+1)$-mal differenzierbar, $P_N(x)$ ihre Lagrangeinterpolation, dann gilt für ein ξ

$$f(x) - P_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{N} (x - x_i)$$

Satz (Chebyshev Minimal Amplitude Theorem)

Sei P_N ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad N

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_N(x)| \geq \max_{x \in [-1,1]} \left|\frac{T_N(x)}{2^{N-1}}\right| = \frac{1}{2^{N-1}}$$

Tschebyscheff Polynome

x_i die Nullstellen des Polynoms, insbesondere

$$\frac{1}{2^N} T_{N+1}(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (x - x_i).$$

Die optimalen Stützpunkte sind die Nullstellen der Chebyshev Polynome, da man den Fehler im Cauchy Theorem Minimieren will

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. **Gauß-Integration**
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Einführung

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i).$$

Die Gewichtsfunktionen ω_i sind gegeben durch

$$\omega_i = \int_a^b C_i(x)dx. \qquad [\mathit{Quadratur\ gewicht}]$$

C_i(x) Cardinal Funktionen mit

$$C_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Satz (Gauss-Jacobi Integration)

Sei ρ eine Gewichtsfunktion, $\{P_N\}_{n=0}^{N+1}$ orth. Polynome, x_i Nullstellen von P_{N+1}, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i) \qquad [\textit{Quadratur Formel}]$$

exakt für Polynome bis zum Grad $(2N+1)$

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Definition (Diskretes Skalarprodukt)

$$(f, g)_G = \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i) g(x_i)$$

Satz (Orthogonalität unter dem diskreten Skalarprodukt)

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, N$$

$$\Rightarrow \; (\phi_i, \phi_j)_G = \delta_{ij}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, N$$

Satz (Interpolation by Quadratur)

$P_N(x)$ ein Polynom vom Grad N das an eine Funktion f interpoliert wird

$$P_N(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \dots, N$$

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$$

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)_G}{(\phi_n, \phi_n)_G}.$$

Gliederung

1. mittelgewichtige Restverfahren
2. Vollständigkeit und Randbedingungen
3. Skalarprodukt & Orthogonalität
4. Galerkin Verfahren
5. Interpolation
6. Polynom-Interpolation
7. Gauß-Integration
8. Galerkin-Verfahren über Gauss Quadratur
9. Trigonometrische & Chebychev Interpolation

Satz (Trigonometrische Interpolation)

Seien die Kollokationspunkte x_k gegeben durch

$$x_k = -\pi + \frac{2\pi k}{N}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

$f(x)$ dargestellt als eine exakte, unendliche Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n sin(nx).$$

Trigonometrische Interpolation

Sei S_N ein trigonometrisches Polynom, dass an f in N Kollokationspunkten interpoliert wird

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} a_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{N/2-1} b_n sin(nx) + \frac{1}{2}a_M cos(Mx)$$

wobei $M = \frac{N}{2}$ gilt und

$$S_N(x_k) = f(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

Trapezregel

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) cos(n x_k)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) sin(n x_k)$$

exakte Fourier Koeffizienten

$$a_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{n+jN} + \alpha_{-n+jN}), \qquad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$b_n = \beta_n + \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_{n+jN} - \beta_{-n+jN}), \qquad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Fehler: Fourier Interpolation

$S_N(x)$ das interpolierte trigonometrische Polynom, $f_N(x)$ die interpolierte exakte Fourier-Reihe

$$|f(x) - f_N(x)| \leq |b_{\frac{N}{2}}| + \sum_{n=1+\frac{N}{2}}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 2(|b_{\frac{N}{2}}| + \sum_{n=1+\frac{N}{2}}^{\infty} (|a_n| + |b_n|))$$

Satz (Chebyshev Interpolation für das Polynom $P_N(x)$)

$$x_k = -cos(\frac{k\pi}{N}), \; k = 0, 1, \ldots, N \qquad [Chebyshev \; Extrema \; Gitter]$$

$$P_N(x) = \frac{1}{2} b_0 T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n T_n(x) + \frac{1}{2} b_N T_N(x)$$

$$b_n = \frac{2}{N}(\frac{1}{2} f(x_0) T_n(x_0) + \sum_{n=1}^{N-1} f(x_k) T_n(x_k) + \frac{1}{2} f(x_N) T_n(x_N))$$

Satz (Chebyshev Interpolation für das Polynom $Q_N(x)$)

$$x_k = -cos(\frac{(2k+1)\pi}{2(N+1)}), \qquad k = 0, 1, \dots, N$$

$$Q_N(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{n=1}^{N} c_n T_n(x)$$

$$c_n = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) T_n(x_k)$$

Satz (Chebyshev Interpolation)

α_n die exakten Spektralkoeffizienten, dann gilt für $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n(x)$$

Fehler: Chebyshev Interpolation

Für alle N und $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|f(x) - P_N(x)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|$$

$$|f(x) - Q_N(x)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|$$