Pseudospektralmethoden für Randwertprobleme

Torsten Keßler

Universität des Saarlandes

30. Juni 2015

Basisfunktionen

Tschebyschow–Polynome

Sei $n \in \mathbf{N}_0$. n -tes Tschebyschow–Polynom T_n erfüllt

$$\forall \vartheta \in \mathbf{R} : \; T_n(\cos(\vartheta)) = \cos(n\vartheta)$$

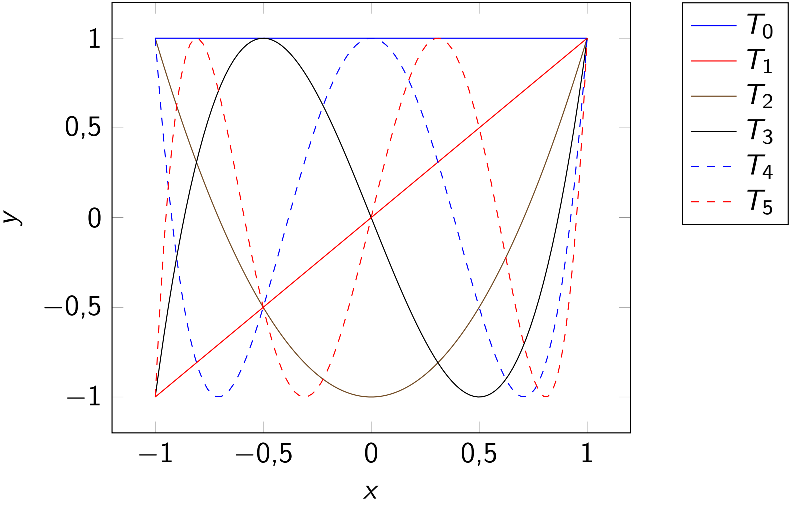
bzw.

$$\forall x \in [-1, 1] : \; T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Es gilt für $x \in [-1, 1]$ und $n \geq 2$ die Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Tschebyschow–Polynome

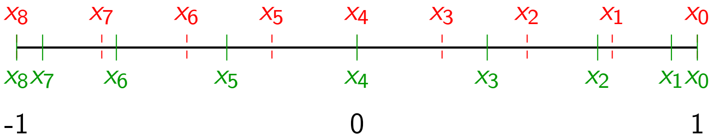


Diskretisierung

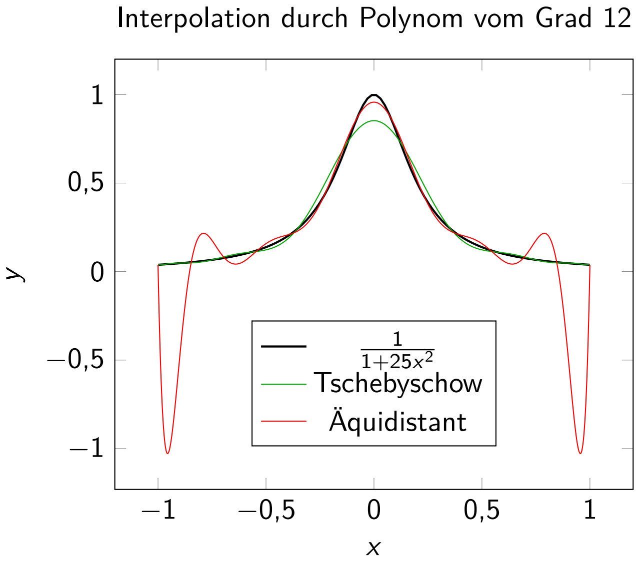
Tschebyschow–Gitter

$[-1, 1]$ zerlegt in $N - 1$ Intervalle mit Knoten

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right) \qquad i = 0, \dots, N-1$$



Interpolation



Pseudospektralmethode

Idee

Diskretisiere Intervall $[-1, 1]$ durch Tschebyschow–Gitter mit N Knoten
Suche eine Näherung u_{num} der Lösung in der Form

$$u_{\text{num}} = \sum_{i=1}^{N} a_i T_{i-1} \quad , a \in \mathbf{R}^N$$

Erfülle dabei die Randbedingungen (äußere Knoten).
Erfülle die Differentialgleichung in den $N-2$ inneren Knoten.
Man erhält ein LGS der Form $La = F$

Randwertproblem in 1D

Beispiel

$$u''(x) + u(x) = 0 \quad , x \in (-1, 1)$$
$$u'(-1) = 1 \quad u(1) = 1$$

hat die Lösung $u(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(1) + \cos(1)}$.

Lineares Gleichungssystem

$$L_{1,j} = T'_{j-1}(-1),\ L_{2,j} = T_{j-1}(1) \quad 1 \leq j \leq N$$
$$F_1 = 1,\ F_2 = 1$$
$$L_{i+2,j} = T''_{j-1}(x_i) + T_{j-1}(x_i) \quad 1 \leq i \leq N-2\,, 1 \leq j \leq N$$
$$F_{i+2} = 0 \quad 1 \leq i \leq N-2$$

Ableitungen der Tschebyschow–Polynome

- Aus der Rekursionsgleichung.

$$T_n^{(m)}(x) = 2xT_{n-1}^{(m)}(x) + 2mT_{n-1}^{(m-1)}(x) - T_{n-2}^{(m)}(x)$$

- Über die Beziehung mit cos. Mit $t = \arccos(x)$ gilt beispielsweise

$$T_n^{(1)}(x) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}, \quad x \in (-1, 1)$$

Für $x = \pm 1$ gilt

$$T_n^{(m)}(\pm 1) = (\pm 1)^{n+m} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{n^2 - k^2}{2k + 1}$$

Ableitungen der Tschebyschow–Polynome

- Beziehung zwischen Tschebyschow– und Gegenbauer–Polynomen. Für $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} C_0^\lambda(x) &= 1 \\ C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x \\ nC_n^\lambda(x) &= 2(n+\lambda-1)xC_{n-1}^\lambda(x) - (n+2\lambda-2)C_{n-2}^\lambda(x) \end{aligned}$$

Für die Ableitung eines Tschebyschow–Polynoms gilt

$$T_n^{(m)}(x) = n2^{m-1}(m-1)!\,C_{n-m}^m(x)$$

Summenberechnung

Ziel

Berechne für $x \in [-1, 1]$

$$S = \sum_{i=1}^{N} a_i T_{i-1}(x)$$

arccos–Methode

Berechne $t = \arccos(x)$. Dann ist

$$S = \sum_{i=1}^{N} a_i \cos((i-1)t)$$

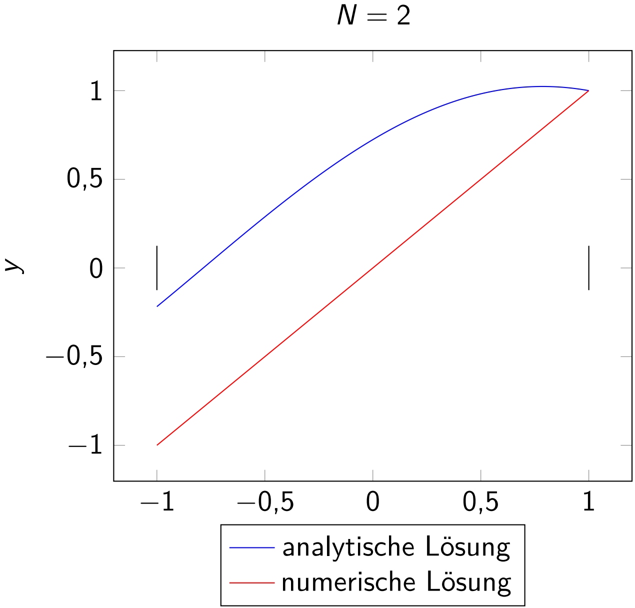
Summenberechnung

Clenshaw–Algorithmus

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{N-1} a_i T_{i-1}(x) + a_N T_{N-1}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} a_i T_{i-1}(x) + a_N(2xT_{N-2}(x) - T_{N-3}(x))
\end{aligned}
$$

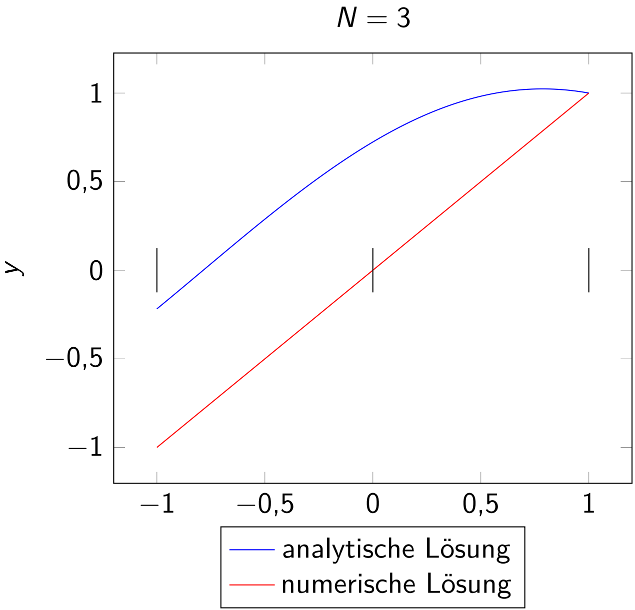
$b_N \leftarrow 0,\ b_{N+1} \leftarrow 0$
for $k = N-1$ **to** 1 **do**
  $b_k \leftarrow a_{k+1} + 2xb_{k+1} - b_{k+2}$
end for
$S \leftarrow a_1 + xb_1 - b_2$

Ergebnisse



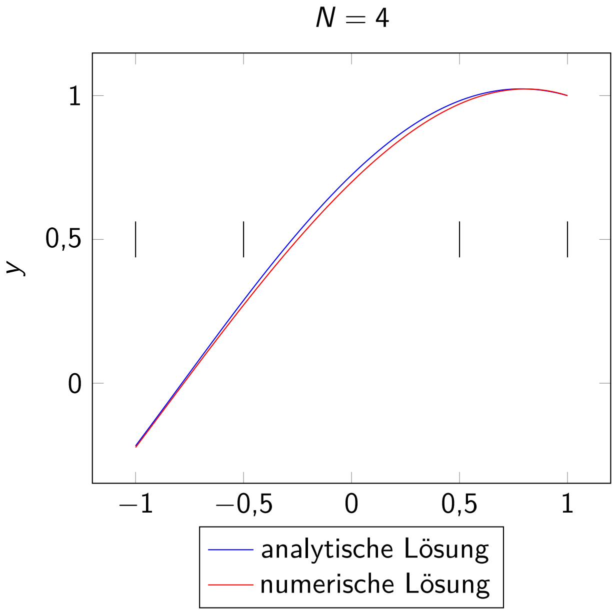
N = 2
y
1
0,5
0
−0,5
−1
−1
−0,5
0
0,5
1
analytische Lösung
numerische Lösung

Ergebnisse

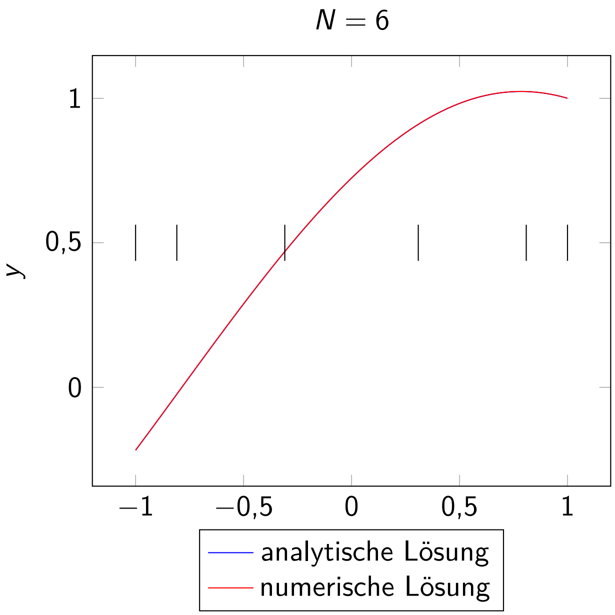


$N = 3$
1
0,5
0
−0,5
−1
y
−1
−0,5
0
0,5
1
analytische Lösung
numerische Lösung

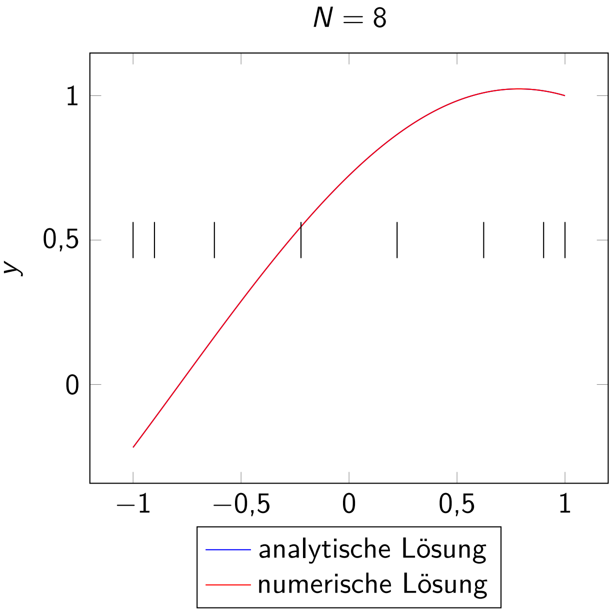
Ergebnisse



Ergebnisse



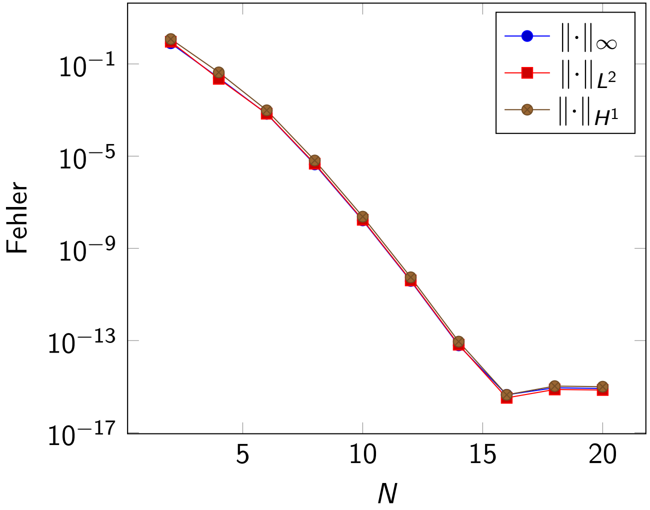
Ergebnisse



Fehleranalyse

N	$\lVert\cdot\rVert_\infty$	$\lVert\cdot\rVert_{L^2}$	$\lVert\cdot\rVert_{H^1}$
2	$7{,}89 \cdot 10^{-1}$	$9{,}18 \cdot 10^{-1}$	$1{,}21$
4	$2{,}48 \cdot 10^{-2}$	$2{,}25 \cdot 10^{-2}$	$4{,}31 \cdot 10^{-2}$
6	$6{,}82 \cdot 10^{-4}$	$6{,}95 \cdot 10^{-4}$	$9{,}77 \cdot 10^{-4}$
8	$4{,}37 \cdot 10^{-6}$	$4{,}71 \cdot 10^{-6}$	$6{,}50 \cdot 10^{-6}$
10	$1{,}63 \cdot 10^{-8}$	$1{,}73 \cdot 10^{-8}$	$2{,}38 \cdot 10^{-8}$
12	$3{,}86 \cdot 10^{-11}$	$4{,}08 \cdot 10^{-11}$	$5{,}57 \cdot 10^{-11}$
14	$6{,}19 \cdot 10^{-14}$	$6{,}61 \cdot 10^{-14}$	$9{,}03 \cdot 10^{-14}$
16	$4{,}44 \cdot 10^{-16}$	$3{,}27 \cdot 10^{-16}$	$4{,}44 \cdot 10^{-16}$
18	$8{,}95 \cdot 10^{-16}$	$7{,}54 \cdot 10^{-16}$	$1{,}06 \cdot 10^{-15}$
20	$8{,}33 \cdot 10^{-16}$	$7{,}16 \cdot 10^{-16}$	$9{,}98 \cdot 10^{-16}$

Fehleranalyse



Koeffizienten

1	$5{,}53 \cdot 10^{-1}$
2	$6{,}36 \cdot 10^{-1}$
3	$-1{,}66 \cdot 10^{-1}$
4	$-2{,}83 \cdot 10^{-2}$
5	$3{,}58 \cdot 10^{-3}$
6	$3{,}61 \cdot 10^{-4}$
7	$-3{,}03 \cdot 10^{-5}$
8	$-2{,}17 \cdot 10^{-6}$
9	$1{,}36 \cdot 10^{-7}$
10	$7{,}59 \cdot 10^{-9}$
11	$-3{,}80 \cdot 10^{-10}$
12	$-1{,}73 \cdot 10^{-11}$
13	$7{,}23 \cdot 10^{-13}$
14	$2{,}78 \cdot 10^{-14}$
15	$-9{,}95 \cdot 10^{-16}$
16	$-3{,}33 \cdot 10^{-17}$

Randwertproblem in 2D

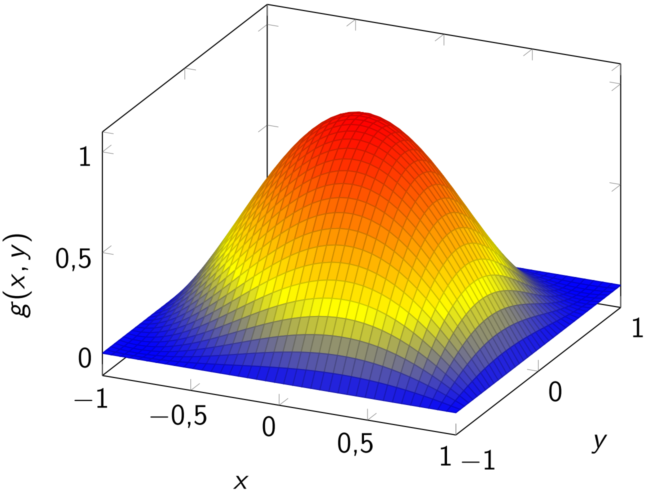
Beispiel

Sei $\Omega = (-1,1)^2$ und
$g : \Omega \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto (1-x^2)(1-y^2)\cos(x+y)$
Betrachte für unbekannte Funktion u

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta g & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $u = g$

Funktion g

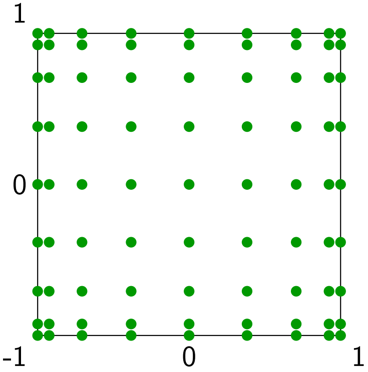


Pseudospektralmethode in 2D

Idee

Suche Näherung in der Form $u_{\text{num}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} T_{i-1} \otimes T_{j-1}$

Mit $a \in \mathbf{R}^{N \times N}$ und $T_{i-1} \otimes T_{j-1}(x, y) = T_{i-1}(x) T_{j-1}(y)$ für $x, y \in [-1, 1]$



Pseudospektralmethode in 2D

Problem

4 freie Indices für ein Gleichungssystem mit 2 freien Indices.

Lösung

Zähle $\{1, \dots, N\}^2$ auf $\{1, \dots, N^2\}$ ab.

Abzählung

10

10

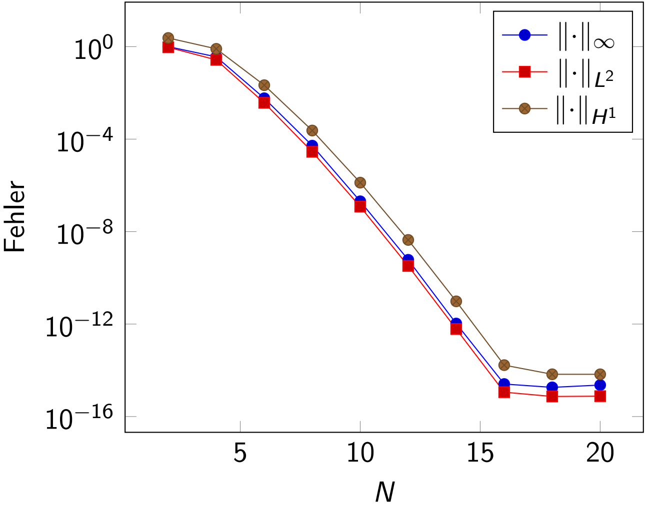
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$$(i,j) \mapsto (i-1)N + j$$

Fehleranalyse

N	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_{L^2}$	$\|\cdot\|_{H^1}$
2	$1{,}00$	$9{,}40 \cdot 10^{-1}$	$2{,}37$
4	$3{,}62 \cdot 10^{-1}$	$2{,}67 \cdot 10^{-1}$	$8{,}04 \cdot 10^{-1}$
6	$5{,}87 \cdot 10^{-3}$	$3{,}71 \cdot 10^{-3}$	$2{,}15 \cdot 10^{-2}$
8	$5{,}22 \cdot 10^{-5}$	$2{,}82 \cdot 10^{-5}$	$2{,}35 \cdot 10^{-4}$
10	$2{,}05 \cdot 10^{-7}$	$1{,}21 \cdot 10^{-7}$	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$
12	$6{,}02 \cdot 10^{-10}$	$3{,}27 \cdot 10^{-10}$	$4{,}36 \cdot 10^{-9}$
14	$1{,}06 \cdot 10^{-12}$	$6{,}09 \cdot 10^{-13}$	$9{,}63 \cdot 10^{-12}$
16	$2{,}55 \cdot 10^{-15}$	$1{,}13 \cdot 10^{-15}$	$1{,}68 \cdot 10^{-14}$
18	$1{,}83 \cdot 10^{-15}$	$7{,}39 \cdot 10^{-16}$	$6{,}74 \cdot 10^{-15}$
20	$2{,}31 \cdot 10^{-15}$	$7{,}61 \cdot 10^{-16}$	$6{,}72 \cdot 10^{-15}$

Fehleranalyse



Randwertproblem in 2D

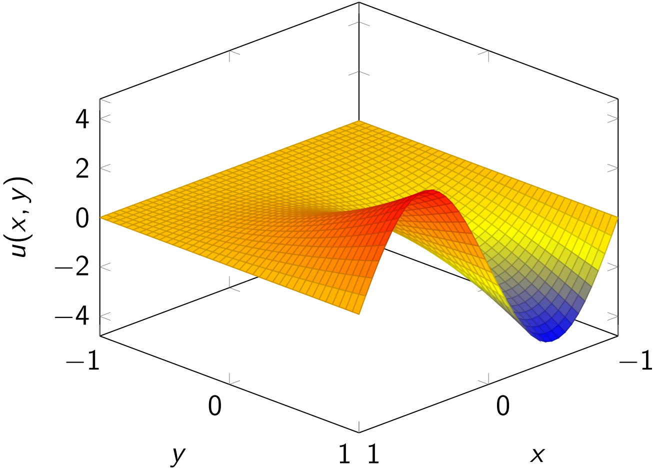
Beispiel

Sei $\Omega = (-1,1)^2$. Betrachte das Rrandwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = (2 - \pi^2(1+y)^2)\sin(\pi x)) & (x,y) \in \Omega \\ u(\pm 1, y) = 0 & y \in [-1,1] \\ \partial_2 u(x,-1) = 0 & x \in [-1,1] \\ \partial_2 u(x,1) + u(x,1) = 8\sin(\pi x) & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Es ist $u : [-1,1]^2 \to \mathbf{R};\ (x,y) \mapsto (1+y)^2 \sin(\pi x)$

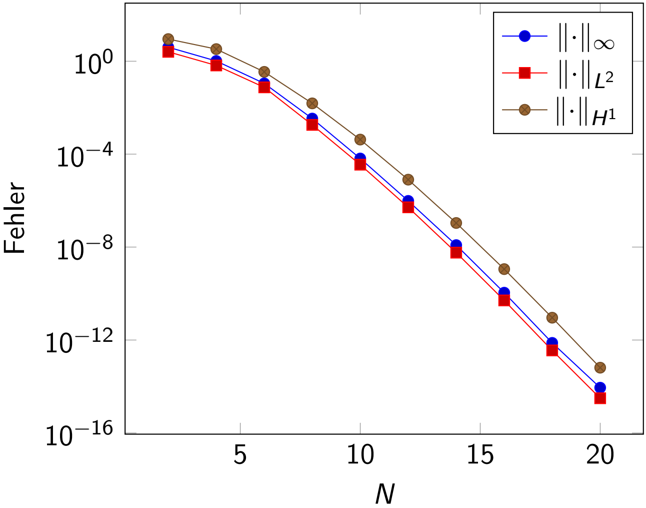
Funktion u



Fehleranalyse

N	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_{L^2}$	$\|\cdot\|_{H^1}$
2	4,00	2,53	8,96
4	1,02	$6{,}56 \cdot 10^{-1}$	3,31
6	$1{,}11 \cdot 10^{-1}$	$7{,}49 \cdot 10^{-2}$	$3{,}47 \cdot 10^{-1}$
8	$3{,}39 \cdot 10^{-3}$	$1{,}81 \cdot 10^{-3}$	$1{,}53 \cdot 10^{-2}$
10	$6{,}49 \cdot 10^{-5}$	$3{,}52 \cdot 10^{-5}$	$4{,}23 \cdot 10^{-4}$
12	$9{,}72 \cdot 10^{-7}$	$5{,}15 \cdot 10^{-7}$	$7{,}97 \cdot 10^{-6}$
14	$1{,}22 \cdot 10^{-8}$	$5{,}76 \cdot 10^{-9}$	$1{,}09 \cdot 10^{-7}$
16	$1{,}09 \cdot 10^{-10}$	$5{,}06 \cdot 10^{-11}$	$1{,}13 \cdot 10^{-9}$
18	$7{,}53 \cdot 10^{-13}$	$3{,}57 \cdot 10^{-13}$	$9{,}13 \cdot 10^{-12}$
20	$8{,}88 \cdot 10^{-15}$	$3{,}12 \cdot 10^{-15}$	$6{,}44 \cdot 10^{-14}$

Fehleranalyse



Konditionsanalyse

N	Dirichlet	Neumann	Robin
2	1,00	1,00	1,00
4	$2{,}42 \cdot 10^1$	$2{,}98 \cdot 10^1$	$3{,}09 \cdot 10^1$
6	$1{,}71 \cdot 10^2$	$1{,}91 \cdot 10^2$	$1{,}96 \cdot 10^2$
8	$6{,}29 \cdot 10^2$	$6{,}88 \cdot 10^2$	$7{,}06 \cdot 10^2$
10	$1{,}72 \cdot 10^3$	$1{,}86 \cdot 10^3$	$1{,}90 \cdot 10^3$
12	$3{,}90 \cdot 10^3$	$4{,}19 \cdot 10^3$	$4{,}29 \cdot 10^3$
14	$7{,}79 \cdot 10^3$	$8{,}33 \cdot 10^3$	$8{,}53 \cdot 10^3$
16	$1{,}42 \cdot 10^4$	$1{,}51 \cdot 10^4$	$1{,}55 \cdot 10^4$
18	$2{,}40 \cdot 10^4$	$2{,}56 \cdot 10^4$	$2{,}62 \cdot 10^4$
20	$3{,}85 \cdot 10^4$	$4{,}10 \cdot 10^4$	$4{,}19 \cdot 10^4$

Konditionsanalyse

N	Dirichlet	Neumann	Robin
2	1	1	1
4	1	1,23	1,28
6	1	1,12	1,15
8	1	1,09	1,12
10	1	1,08	1,10
12	1	1,07	1,10
14	1	1,07	1,09
16	1	1,06	1,09
18	1	1,07	1,09
20	1	1,06	1,09

Zusammenfassung

- Einfache Implementierung
- exponentielle Konvergenz bei polynomialer Laufzeit
- Beschränkung auf lineare Differentialoperatoren
- Beschränkung auf quaderförmige Gebiete
- Statt Kollokation auch Galerkin–Verfahren anwendbar (Spektrale–Elemente–Methode)