Kardinalfunktionen

Florian Badt

2. Juni 2015

Gliederung

Grundlegende Problemstellung

- Ausgangspunkt: $Lu = f$
- Approximation der unbekannten Funktion: $u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n$
- Minimierung des Residuums $R(x; a_0, a_1, ..., a_N) = L_{u_N} - f$ $\rightarrow$ verschiedene Minimierungsstrategien

- Idee: Wahl von Interpolationsstellen x_i , sodass $R(x_i; a_0, a_1, .., a_N) = 0$ für $i = 0, 1, ..., N$

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten:

1. Reihenkoeffizienten a_n sind unbekannt.
2. Funktionswerte an den Gitterpunkten $u(x_i)$ sind unbekannt.

Zwischen den 2 Möglichkeiten besteht eine nützliche Beziehung:

Theorem

Sei $P_N(x)$ das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit der Gestalt

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x).$$

Dann sind die Koeffizienten a_n gegeben durch

$$a_n = \frac{< f, \phi_n >}{< \phi_n, \phi_n >}.$$

Lagrangeinterpolation und Sinc-Funktionen

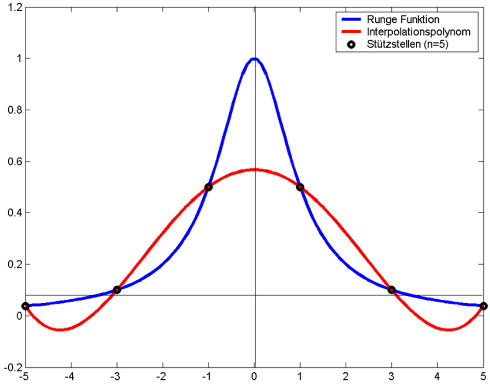
Gesucht: Polynom P maximalen Grades, sodass $P(x_i) = f_i$ für $i = 0, ..., n$.

Definition

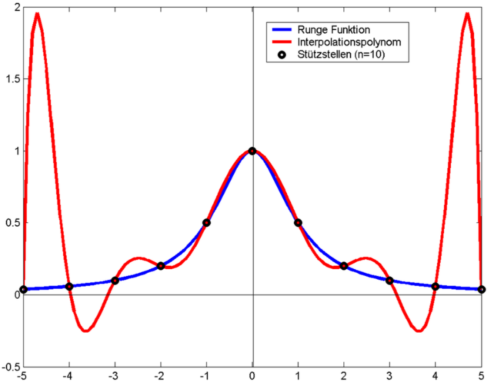
Es seien $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Dann heißen $L_i^n \in P_n$ mit $L_i^n = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ Lagrange-Polynome.

- Interpolationsformel: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i^n(x)$
- Intuition: $P_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$?

Runge-Phänomen



Runge-Phänomen

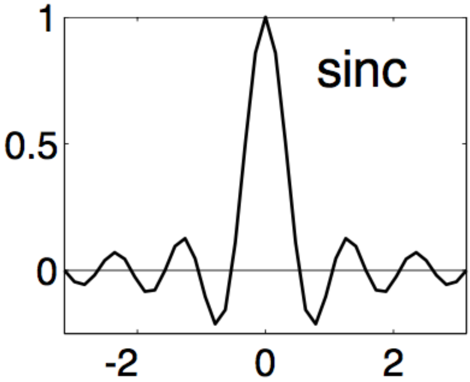


Ausweg: Betrachte die Lagrange Polynome L_i^n für $n \to \infty$
$\to$ sinc-Funktion

Definition

Seien Stützstellen $x_i = jh$ für $j \in \mathbb{Z}$ gegeben. Dann sind durch $C_k(x; h) = \frac{\sin(\frac{\pi(x-kh)}{h})}{\frac{\pi(x-kh)}{h}}$ Whittaker's Kardinalfunktionen definiert.

Alternative Darstellung: $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$


sinc
1
0.5
0
-2
0
2

Definition

Eine Funktion $f_W(y)$ heißt bandbeschränkt mit Bandbreite W, falls sie als abgeschnittenes Fourier Integral $f_W(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^{W} F(\omega) e^{-i\omega y} d\omega$ dargestellt werden kann.

Theorem (Shannon-Whittaker Abtasttheorem)

Sei $f_W(y)$ eine bandgeschränkte Funktion mit Bandbreite W, dann gilt für $h \leq \frac{\pi}{W}$:
$f_W(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\frac{\pi j}{W}) sinc(\frac{Wy}{\pi} - j)$.

Eigenschaften der *Sinc* Funktion:

- $C_k(x_j; h) = \delta_{jk}$
- $sinc(0) = 1$
- unter den Voraussetzungen des Shannon-Theorems: exakte Approximation, falls f hinreichend schnell abklingt.

Idee: gesuchte Funktion soll durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden.

- besonders geeignet bei periodischen Funktionen

Gottlieb, Hussaini, Orszag: für Stützstellen $x_j = \frac{2\pi j}{N}$ gilt für den trigonometrischen Interpolant einer gegebenen Funktion f:
$f(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(x) C_j(x)$

- $C_j(x) = \frac{1}{N} \sin(\frac{N(x-x_j)}{2}) \cot(\frac{(x-x_j)}{2})$

Zusammenhang zwischen Sinc-Funktion und trigonometrischer Kardinalfunktion I

Taylorentwicklung des Cotangens führt zu:

$$C_j(x) = \frac{\sin(\frac{N(x-x_j)}{2})}{\frac{N(x-x_j)}{2}}\{1 - \frac{(x-x_j)^2}{12} + O([x-x_j]^4)\}$$

$$= \operatorname{sinc}(\frac{N(x-x_j)}{2})\{1 - \frac{(x-x_j)^2}{12} - \frac{(x-x_j)^4}{720} + ...\}$$

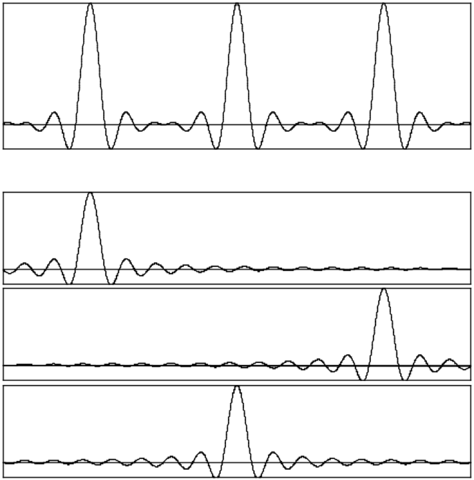
$\rightarrow$ in $x = x_j$ ist C_j nicht von der sinc-Funktion zu unterscheiden.

Zusammenhang zwischen Sinc-Funktion und trigonometrischer Kardinalfunktion II

für $x_0 = 0$ gilt:

$$C_0(x;h) = \frac{1}{2N}\sin(Nx)\cot(\frac{x}{2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\frac{x-2\pi m}{h})$$

$\rightarrow$ Die trigonometrische Kardinalfunktion ist nichts anderes als eine Summation von unendlich vielen Sinc-Funktionen!



Definition

Eine Folge von Polynomen $P_n, n \in \mathbb{N}$ heißt orthogonal, falls

$$< P_m, P_n >_\omega = 0, \;\; m \neq n,$$

mit dem gewichteten $\mathcal{L}_2$ Skalarprodukt $< \cdot >_\omega$.

- Verschiedene Gewichtsfunktionen ω führen zu unterschiedlichen orthogonalen Polynomen.

Tschebyscheffpolynome und -interpolation I

Definition

Die Funktionen

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ für } x \in [-1, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}_0$$

heißen Tschebyscheff-Polynome.

- Nullstellen:

$$t_i^{(n)} = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right) \text{ für } i = 1, .., n$$

Man kann zeigen, dass die Stützstellenwahl $x_i = t_i^{(n)}$ optimal bezüglich des Interpolationsfehlers ist!

Tschebyscheffpolynome und -interpolation II

Idee der Tschebyscheff-Interpolation:

- Verwende Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x)$ als Stützstellen.
  $\rightarrow$ Verwende T_{n+1} zur Konstruktion von Kardinalfunktionen.

- Problemstelle: $x = x_j$

Tschebyscheffpolynome und -interpolation III

Taylorentwicklung von $T_{n+1}(x)$ im Punkt $x = x_j$ liefert:

$$T_{n+1}(x) \approx T_{n+1}(x_j) + T_{n+1,x}(x_j)(x - x_j) + O([x - x_j]^2)$$

Definition

Die Kardinalfunktion wird dann durch

$$C_j^{T_{n+1}}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{T_{n+1,x}(x_j)(x - x_j)}$$

definiert.

Kardinalfunktionen von orthogonalen Polynomen

Die Definition kann auf beliebige Basisfunktionen ϕ_{n+1} ausgeweitet werden, sodass im allgemeinen Fall dann gilt:

$$C_j^{\phi_{n+1}}(x) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_{n+1,x}(x_j)(x - x_j)}$$

Andere Möglichkeit für die Stützstellenwahl:

- Lobatto-Gitter: Verwende als Stützstellen die Extrema und einen Anfangs-/Endpunkt.

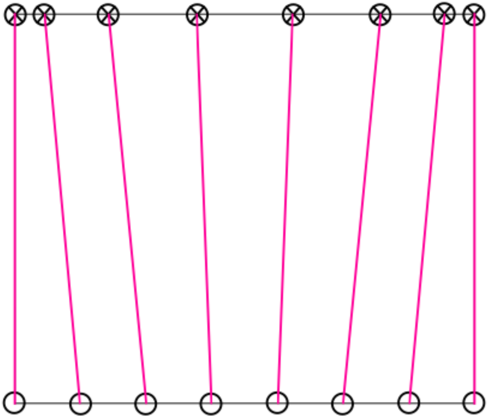
Lobatto-Gitter und Kardinalfunktionen

In diesem Fall haben die Kardinalfunktionen folgende Gestalt:

$$C_j(x) = \frac{(1-x^2)\phi_{N,x}(x)}{[(1-x_j^2)\phi_{N,x}(x_j)]_x(x-x_j)} \quad j = 0, ..., N$$

unter der Annahme, dass $x = \pm 1$ die Endpunkte sind.

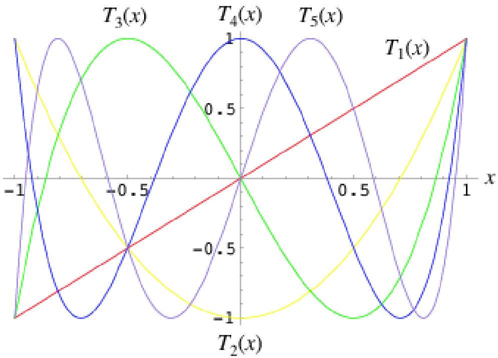
Lobatto-Gitter vs. äquidistante Zerlegung



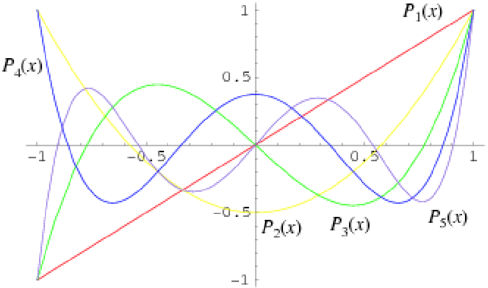
trigonometrische Kardinalfunktionen vs. Tschebyscheff-Kardinalfunktionen

- beide haben ähnliche Gestalt
- Tschebyscheff-Kardinalfunktionen oszillieren nahe den Endpunkten sehr schnell und in der Mitte des Intervalls langsam.
- anders bei den Legendre-Polynomen, da dort die Interpolationspunkte näher am Zentrum liegen.

Tschebyscheff-Polynome



Legendre-Polynome



Anwendung von Kardinalfunktionen

Annahme: Operatorgleichung $Lu = f$ ist linear.
Man erhält dann die 2 äquivalenten Formen:

1. $Lu = f$ [*Kardinalfunktionenform*]
2. $Ha = f$ [*Reihenkoeffizientenform*]

wobei

$$u(x) \approx \sum_{n=0}^{n} a_n \phi_n(x)$$

Anwendung von Kardinalfunktionen II

Die anderen Elemente sind dann gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
u_i &= u(x_i) \\
f_i &= f(x_i) \\
L_{ij} &= (LC_j[x])|_{x=x_i} \\
H_{ij} &= (L\phi_j[x])|_{x=x_i}
\end{aligned}
$$

wobei x_i die Interpolationspunkte, $\phi_j(x)$ die Basisfunktionen und $C_j(x)$ die Kardinalfunktionen sind.

Anwendung von Kardinalfunktionen III

Die Koeffizienten a_n und die u_i hängen dann wie folgt zusammen:

$$Mu = a$$

mit

$$M_{ij} = \frac{\phi_i(x_j)\omega_j}{< \phi_i, \phi_j >}.$$

Anwendung von Kardinalfunktionen IV

Man erhält dann:

$$L = HM$$
$$H = LM^{-}1$$

Daher:

- u_i als Unbekannte möglich, selbst wenn kein Programm zur Auswertung von Kardinalfunktionen vorhanden ist.
- Wechsel zwischen den Darstellungsformen durch Matrixmultiplikationen möglich.

Anwendung von Kardinalfunktionen V

Die Berechnung von $L = HM$ bzw. $H = LM^{-1}$ ist mit $O(N^3)$ Rechenoperationen sehr teuer. Aber es gibt auch sehr effiziente Algorithmen wie die schnelle Fourier Transformation.