Kapitel 28

Bemerkungen zur Laplace-Transformation

28.1 Die Transformation (Heaviside-Funktion; konvergenzerzeugender Faktor; exponentielle Ordnung)

Eng verwandt mit der Fourier-Transformation ist die Laplace-Transformation, die hier nur kurz und exemplarisch vorgestellt werden soll. Für detailliertere Ausführungen sei auf die Literatur (z.B. [Bä] oder weiterführende Spezialliteratur verwiesen).

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass die Funktionenklasse $\mathcal{D}^*$, in der eine Fourier-Transformierte nach Satz 27.2.1 definiert ist, für viele Anwendungen zu eng ist. Beispielsweise ist ein Einschaltvorgang zum Zeitpunkt $x = 0$ charakterisiert durch die Heaviside-Funktion

$$\theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0\,; \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht absolut integrierbar und liegt damit nicht in der Funktionenklasse $\mathcal{D}^*$. Allgemein werden in diesem Kapitel stets Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \;\; x < 0$$

betrachtet, m.a.W. Funktionen $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die für $x < 0$ durch die Nullfunktion fortgesetzt werden.

Die Idee zur Umgehung des obigen Problems ist es nun, einen sogenannten konvergenzerzeugenden Faktor

$$e^{-\alpha x}\,, \qquad \alpha > 0 \ \text{ fixiert}\,,$$

einzuführen und das Verhalten der Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0\,, \\ e^{-\alpha x} f(x) & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

zu studieren. Die Hoffnung ist, dass f^* aufgrund der schnell fallenden Exponentialfunktion ($\alpha > 0$, $x \geq 0$) absolut integrierbar ist. Ist dies der Fall, so lautet die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \hat{f}^*(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-iut}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-iut}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+iu)t} f(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Mit der komplexen Notation $z = \alpha + iu$ ergibt sich

$$\hat{f}^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Die rechte Seite wird jetzt nicht mehr als Funktion in $u \in \mathbb{R}$ aufgefasst, sondern als Funktion in der komplexen Variablen z, die Schreibweise ist unter Vernachlässigung des Vorfaktors $1/\sqrt{2\pi}$

$$F(z) := \mathcal{L}[f] := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

Die Funktionenklasse, auf der eine solche Transformation sinnvoll definiert werden kann ist (vgl. den nachfolgenden Satz 28.1.1)

Definition 28.1.1

Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig.

i) Die Funktion f heißt von exponentieller Ordnung γ für ein fixiertes $\gamma \in \mathbb{R}$, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \le M e^{\gamma x} \,.$$

ii) Die Funktion ist heißt der Klasse $\mathcal{E}_\gamma$, falls zusätzlich für alle $x \in [0,\infty)$ (mit der Notation $f(0^-) = 0$) gilt

$$f(x) = \frac{1}{2}\big[f(x^+) + f(x^-)\big] \,.$$

Beispiele.

i) Offensichtlich sind alle Polynome für alle $\gamma > 0$ von exponentieller Ordnung γ.

ii) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\beta x}$ für ein fixiertes $\beta \in \mathbb{R}$, ist von exponentieller Ordnung γ, falls gilt $\beta \le \gamma$.

iii) Ersetzt man in den obigen Beispielen den Funktionswert im Nullpunkt durch $\frac{1}{2} f(0)$, so ist f jeweils von der Klasse $\mathcal{E}_\gamma$.

Es gilt:

Satz 28.1.1

Ist f von der Klasse $\mathcal{E}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, so wird dieser Funktion mittels (2) die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

zugeordnet. Die Laplace-Transformierte existiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > \gamma$.

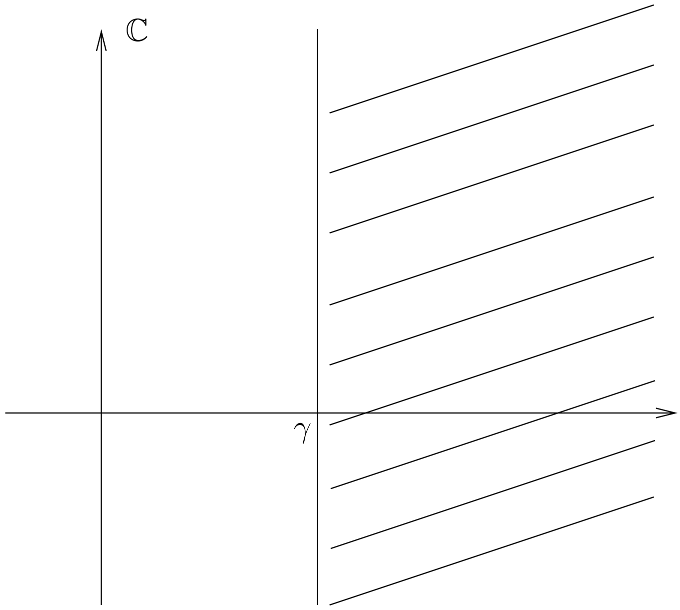

Abbildung 28.1: Das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation.

Bemerkungen.

i) An dieser Stelle ist nur wesentlich, dass f von exponentieller Ordnung ist, die Klasse $\mathcal{E}_\gamma$ wird erst zur Diskussion der inversen Laplace-Transformation benötigt.

ii) Das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation einer Funktion von exponentieller Ordnung γ ist in Abbildung 28.1 angedeutet.

Beispiel. Es sei $f(x) = e^{\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann ist für Re $z > \beta$

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} e^{\beta t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\beta - z} e^{(\beta - z)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{z - \beta} \,, \end{aligned}$$

man erkennt deutlich die Bedeutung des Konvergenzgebietes.

Ebenso wie bei der Fourier-Transformation ist es natürlich essentiell, dass die Funktion f aus ihrer Laplace-Transformierten zurückgewonnen werden kann. Um das einzusehen sei f von der Klasse $\mathcal{E}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, und wie oben

$$f^*(x) = e^{-\alpha x} f(x) ,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \gamma$ fixiert. Wegen $\alpha > \gamma$ und $f \in \mathcal{E}_\gamma$ ist leicht nachzurechnen, dass f^* absolut integrierbar ist (Übung) und die Fourier-Transformierte von f^* wurde bereits in (1) hergeleitet:

$$\hat{f}^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\alpha+iu)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\alpha + iu) .$$

Satz 27.2.1 liefert

$$f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{iux} F(\alpha + iu)\,\mathrm{d}u ,$$

d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\alpha x}}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{iux} F(\alpha + iu)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{(\alpha+iu)x} F(\alpha + iu)\,\mathrm{d}u . \end{aligned}$$

Vorsicht. An dieser Stelle wird bzgl. der reellen Variablen u integriert, es handelt sich noch nicht um ein komplexes Wegintegral im Sinne von Definition 22.3.1. Hier ist die Literatur oft missverständlich bzw. die Notation unsauber.

Genauer sei φ_R: $[-R, R] \to \mathbb{C}$ der Weg in der komplexen Ebene, der definiert ist durch die Abbildungsvorschrift

$$u \mapsto \alpha + iu ,$$

α wie oben fixiert. Dann verbindet φ_R die Punkte $\alpha - iR$ und $\alpha + iR$ (parallel zur imaginären Achse) und es gilt per definitionem

$$\int_{\varphi_R} e^{zx} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{(\alpha+iu)x} F(\alpha + iu) i\,\mathrm{d}u ,$$

und zusammenfassend ist gezeigt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_R} e^{zx} F(z)\,\mathrm{d}z . \tag{3}$$

Bemerkungen.

i) Mit (3) ist die Umkehrung der Laplace-Transformation bzw. die inverse Laplace-Transformation gefunden, es handelt sich um das Gegenstück zu Satz 27.2.1.

ii) Wie im Fall der Fouriertransformation gilt ein Eindeutigkeitssatz.

iii) Zur Auswertung und Interpretation von (3) sei an die ausführliche Diskussion von komplexen Kurvenintegralen in Teil IX, erinnert. Hier ist insbesondere der Residuensatz sehr hilfreich.

iv) Die inverse Laplace-Transformation ist in der Regel recht kompliziert (und wie gesagt oft mit der Hilfe des Residuensatzes) auszurechnen. In der Praxis entnimmt man sie oft aus Tabellen (siehe z.B. [HSZ]).

v) Wie eingangs erwähnt, soll hier nicht weiter auf die Laplace-Transformation eingegangen werden, für Rechenregeln und weitere Eigenschaften sei auf die Literatur verwiesen. Gleiches gilt für Anwendungen etwa bei der Diskussion von Anfangswertproblemen. Statt dessen soll in nächsten Teil das systematische Studium von Anfangswertproblemen begonnen werden.