Kapitel 23

Cauchys Integralsatz und Cauchys Integralformel

23.1 Der Cauchysche Integralsatz (einfach zusammenhängend; einfache geschlossene Kurven; Fresnelsche Integrale)

Wird die Voraussetzung "f habe eine Stammfunktion" weggelassen, so zeigt der Cauchysche Integralsatz, dass für holomorphe Funktionen die Frage nach der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals zurückgeführt werden kann auf eine Eigenschaft des zugrunde liegenden Gebietes. Es ist herauszustellen, dass eine Analogon für Kurvenintegrale differenzierbarer Funktionen in der reellen Analysis nicht gelten kann.

Definition 23.1.1

Ein Gebiet G (offen und zusammenhängend) heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder in G verlaufende geschlossene (Anfangs- gleich Endpunkt) doppelpunktfreie ($\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ für alle $t_1 \neq t_2$ mit $a \leq t_1, t_2 < b$) Polygonzug $\gamma\colon [a,b] \to G$ nur Punkte von G umschließt.

Bemerkungen.

i) Die Begriffe "geschlossen" und "doppelpunktfrei" sind für Kurven bzw. Integrationswege natürlich analog definiert. Geschlossene, doppelpunktfreie Kurven (...) heißen im Folgenden einfache geschlossene Kurven (...).

ii) Da in der obigen Definition lediglich einfache geschlossene Polygonzüge betrachtet werden, bereitet der Begriff “umschließen” keine Schwierigkeiten.

iii) Anschaulich bedeutet die Definition: “G hat keine Löcher”.

Beispiele.

i) Beispiele von geschlossenen bzw. doppelpunktfreien Integrationswegen sind in Abbildung 23.1 angedeutet.

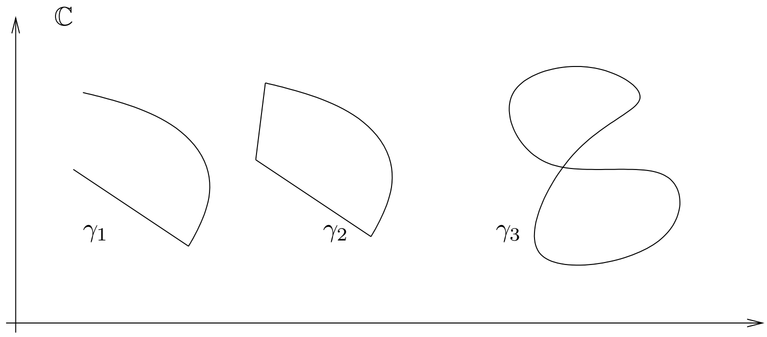

Abbildung 23.1: Integrationswege: Geschlossen sind γ_2, γ_3, doppelpunktfrei γ_1, γ_2.

ii) Die Menge G_1 aus Abbildung 23.2 ist einfach zusammenhängend, G_2 ist es nicht.

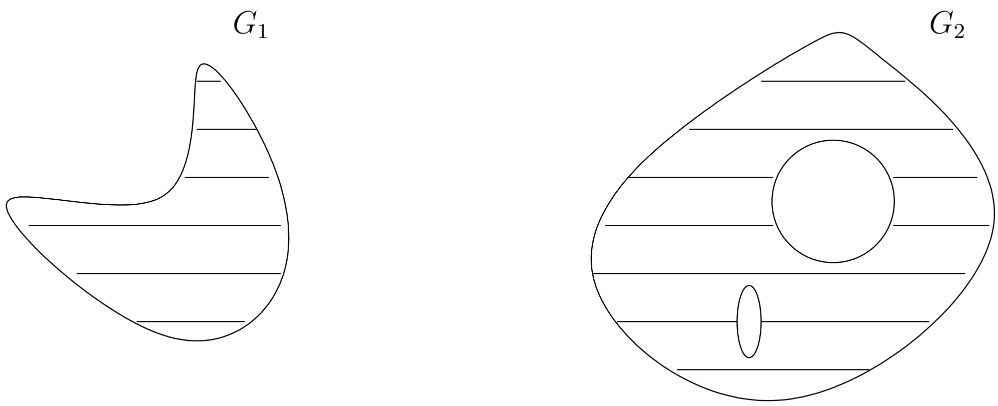

Abbildung 23.2: Zum Begriff “einfach zusammenhängend”.

iii) Die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ ist einfach zusammenhängend.

iv) Das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : \ z \neq 0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Auf dieses Beispiel wird noch oft zurückzukommen sein.

Satz 23.1.1 *(Der Cauchysche Integralsatz)*

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph auf G. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg in G:

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0 \ .$$

Beweisidee. Der Beweis von Satz 23.1.1 wird zunächst für den Fall ausgeführt, dass γ die Berandung eines Dreiecks parametrisiert, dann für geschlossene Polygonzüge und schließlich approximativ im allgemeinen Fall. □

Bemerkungen.

i) Ist wie oben $\gamma(t) = re^{it}$, so folgt aus

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i$$

kein Widerspruch, da $\mathbb{C} - \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

ii) Unter den Voraussetzungen von Satz 23.1.1 folgt die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.

iii) Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes können auch reelle Integrale berechnet werden.

Beispiel. (Fresnelsche Integrale) Es soll die Behauptung

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos(t^2)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$$

mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes verifiziert werden. Betrachtet wird dazu das Gebiet $G = \mathbb{C}$ sowie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma e^{-z^2}\, \mathrm{d}z \ ,$$

wobei der geschlossene Integrationsweg stückweise gegeben ist durch ($R > 0$ fixiert)

$$
\begin{array}{llll}
\gamma_1(t) = t & \text{für} \quad t \in [0, R] & \text{d.h.} & \dot\gamma_1(t) = 1 \; , \\[2ex]
\gamma_2(t) = Re^{it} & \text{für} \quad t \in [0, \pi/4] & \text{d.h.} & \dot\gamma_2(t) = iRe^{it} \; , \\[2ex]
\gamma_3(t) = -te^{i\pi/4} & \text{für} \quad t \in [-R, 0] & \text{d.h.} & \dot\gamma_3(t) = -e^{i\pi/4} \; .
\end{array}
$$

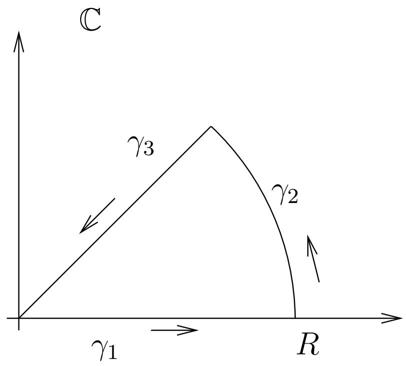

Abbildung 23.3: Der zusammengesetzte Integrationsweg γ.

Die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ ist holomorph, G ist einfach zusammenhängend, der aus γ_1, γ_2 und γ_3 zusammengesetzte Weg γ ist ein geschlossener Integrationsweg (stückweise glatt), also folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma e^{-z^2} \, \mathrm{d}z = 0 \; .$$

Mit Hilfe der Wegadditivität erhält man

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma e^{-z^2} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^R e^{-t^2} 1 \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} iRe^{it} \, \mathrm{d}t - \int_{-R}^0 e^{-t^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} \, \mathrm{d}t \; ,
\end{aligned}
$$

das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\int_0^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}_{=:I_1(R)} + \underbrace{iR\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2[\cos(2t)+i\sin(2t)]+it}\,\mathrm{d}t}_{=:I_2(R)} \\ & \underbrace{-e^{i\pi/4}\int_{-R}^0 e^{-it^2}\,\mathrm{d}t}_{=:I_3(R)} \,. \end{aligned}$$

Es gilt (zum Beweis vgl. etwa Hildebrandt, Analysis)

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Mit Hilfe von $|e^{i\alpha}| = 1$ kann man weiter zeigen:

$$\lim_{R\to\infty} |I_2(R)| = 0\,.$$

Wegen (Substitution $\tau = -t$)

$$\int_{-R}^0 e^{-it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^R e^{-it^2}\,\mathrm{d}t$$

ist also

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\int_0^R \big(\cos(t^2) - i\sin(t^2)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^\infty \big(\cos(t^2)+\sin(t^2)\big)\,\mathrm{d}t\,, \\ 0 &= \int_0^\infty \big(\cos(t^2)-\sin(t^2)\big)\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung. □

Bemerkungen.

i) Es gibt auch Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes für nicht einfach zusammenhängende Gebiete. Man betrachte etwa die in Abbildung 23.4 dargestellte Situation:

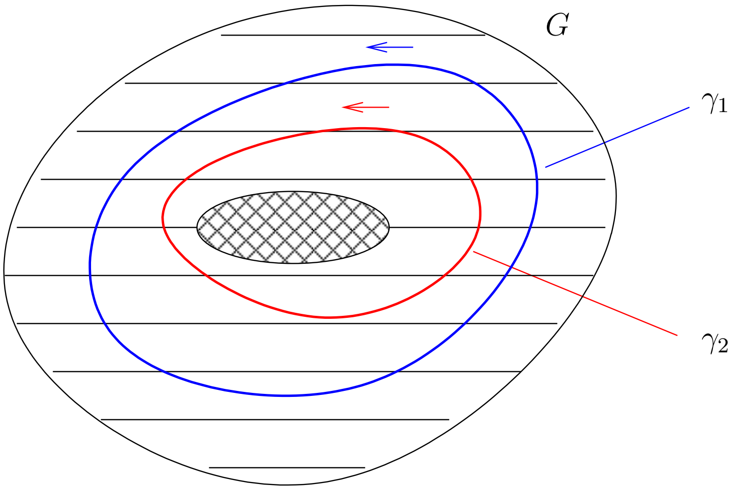

Abbildung 23.4: Zur Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

Dann gilt die Behauptung

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Zu beachten ist: Die einzelnen Integrale verschwinden i.A. nicht.

Die obige Gleichheit sieht man mit einer typischen Idee ein: Gegeben seien zwei Integrationswege γ_1, γ_2 wie auf der linken Seite von Abbildung 23.5 angedeutet.

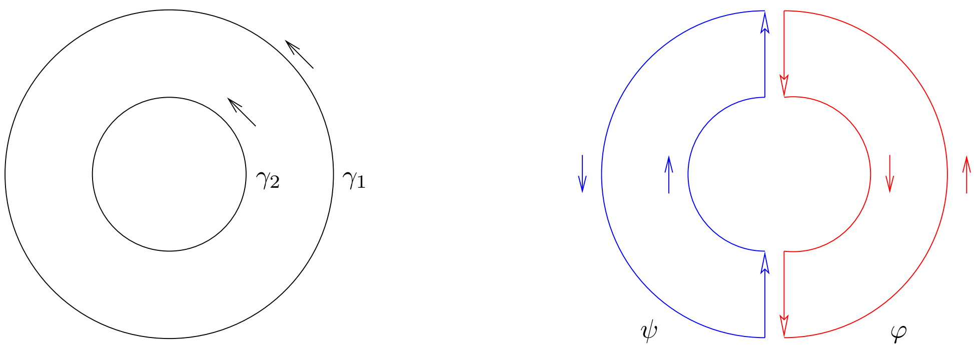

Abbildung 23.5: Zerlegung in einfach zusammenhängende Gebiete.

Mit vertikalen “Schnitten” wird das (nicht einfach zusammenhängende) Gebiet in zwei einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt, die von der roten Kurve φ bzw. von der blauen Kurve ψ (siehe rechte Seite von Abbildung 23.5) berandet sind. Nun kann der Cauchysche Integralsatz angewendet werden:

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ , \qquad \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Anschließend überlegt man sich:

- Die beiden inneren Halbkreise entsprechen zusammen der Kurve $-\gamma_2$.
- Die beiden äußeren Halbkreise entsprechen zusammen der Kurve γ_1.
- Die Integrale über die "vertikalen Schnitte" heben sich gegenseitig auf.

Insgesamt ist so gezeigt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\ , \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

ii) Eine wichtige Konsequenz aus i) ist: Es sei $G = \mathbb{C} - \{0\}$ und

$$f(z) = \frac{1}{z}\ .$$

Dann gilt für jeden (positiv orientierten) einfachen geschlossenen Integrationsweg γ, der den Nullpunkt im Inneren enthält (Zur Erinnerung: Positiv orientiert bedeutet, dass beim Durchlaufen der Kurve das Innere auf der linken Seite liegt):

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa_r(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\ .$$

Dabei ist $\kappa_r(0)$ wie in Abbildung 23.6 angedeutet eine Parametrisierung der positiv orientierten Kreislinie vom Radius r um 0.

Enthält γ den Nullpunkt nicht im Innern, so gilt (warum?)

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

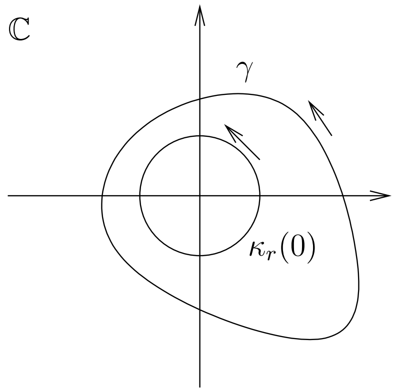

Abbildung 23.6: γ enthält den Nullpunkt im Innern.

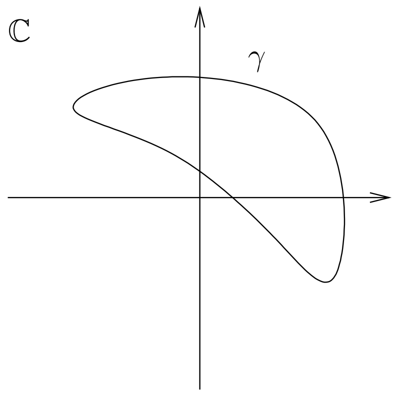

Abbildung 23.7: γ enthält den Nullpunkt nicht im Innern.

23.2 Die Cauchysche Integralformel (Existenz beliebiger Ableitungen holomorpher Funktionen; Harmonizität von Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen; Satz von Liouville)

Aus dem Cauchyschen Integralsatz und dessen Verallgemeinerung folgt eine Aussage, die in der reellen Analysis völlig falsch ist:

Allein aus der Kenntnis einer holomorphen Funktion f auf dem Rand einer Kugel $\partial B_r(z_0)$ ergeben sich die Funktionswerte auf der ganzen Kugel $B_r(z_0)$. M.a.W.:

Die kleinste Änderung von f im Innern von $B_r(z_0)$ bei festgehaltenen Werten auf $\partial B_r(z_0)$ zerstört unmittelbar die Differenzierbarkeit von f.

Präzise lautet der Satz für die Kreisscheibe:

Satz 23.2.1 *(Cauchys Integralformel für die Kreisscheibe)*

Es sei f holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und es gelte $B_r(z_0) \Subset U$. Dann ist

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z \quad \text{für alle } w \in B_r(z_0) \, .$$

Hier und im folgenden bezeichnet $\kappa_r(z_0)$ die Parametrisierung $\kappa_r(z_0)(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, der Kreislinie vom Radius r um den Punkt z_0.

Bemerkungen.

i) Die Voraussetzungen des Satzes sind in Abbildung 23.8 skizziert.

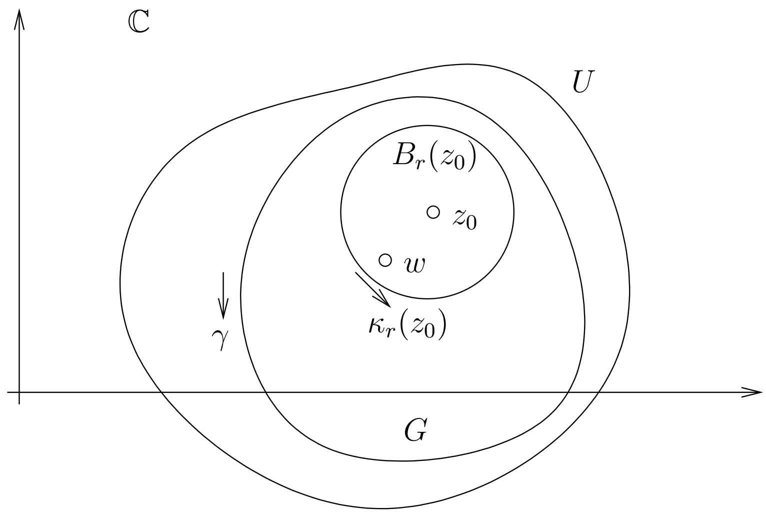

Abbildung 23.8: Zur Cauchyschen Integralformel.

ii) Der Cauchysche Integralsatz gilt nicht nur für Kreischeiben, er kann analog für einfach zusammenhängende Gebiete $G \Subset U$ formuliert werden (vgl. ebenfalls Abbildung 23.8).

iii) Für $w \in U - \overline{B_r(z_0)}$ gilt natürlich (warum?)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z = 0 \, .$$

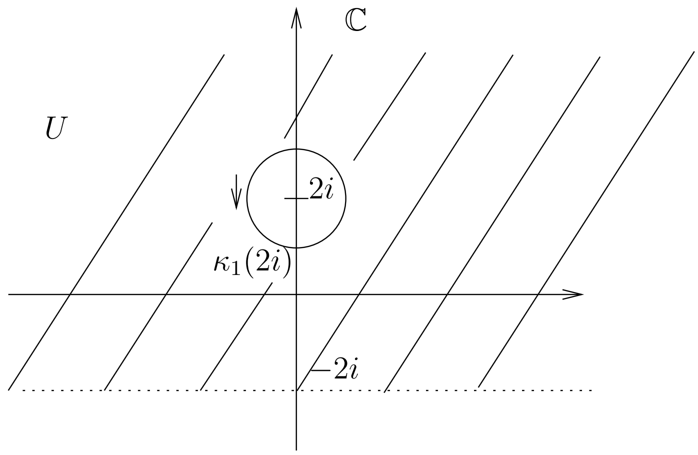

Abbildung 23.9: Ein Beispiel zur Cauchyschen Integralformel.

Beispiel. Es sei $U = \{z : \operatorname{Im} z > -2\}$, $z_0 = 2i$ und $r = 1$, $w = 2i$. Weiterhin sei

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} .$$

Aus

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} = \frac{f(z)}{z-w}$$

folgt

$$\int_{\kappa_1(2i)} \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa_1(2i)} \frac{f(z)}{z-2i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} .$$

Differenziert man in Satz 23.2.1 formal unter dem Integralzeichen, so ergibt sich sogar:

Satz 23.2.2

Eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{C}$ offen) ist beliebig oft differenzierbar. Damit sind alle komplexen Ableitungen f', f'', ..., $f^{(n)}$, ... in U holomorphe Funktionen und für jede Kreischeibe $B_r(z_0) \Subset U$ und alle $w \in B_r(z_0)$ gilt

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z .$$

Bemerkungen.

i) Wieder ist auch eine Version für einfach zusamenhängende Gebiete richtig.

ii) Eine auf U komplex differenzierbare Funktion ist also automatisch beliebig oft differenzierbar. Wieder wird der Unterschied zur rellen Analysis deutlich.

iii) Ist $f = u + iv$ holomorph auf U, so ist f nach Satz 23.2.2 beliebig oft differenzierbar und die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \ , \qquad u_y = -v_x$$

können differenziert werden. Wird die erste Gleichung nach x differenziert, die zweite nach y, so folgt

$$u_{xx} = v_{yx} \ , \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

und aus der Vertauschbarkeit der Ableitungen folgt

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0 \ .$$

Analog sieht man

$$v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0$$

ein, d.h.:Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind harmonisch.

Beispiele.

i) Es seien $w = z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert, $f(z) \equiv 1$. Dann ist (für alle $r > 0$)

$$f'(z_0) = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{1}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z \ .$$

ii) Es sei $w = z_0 = 0$ und

$$f(z) = e^{iz} \ , \qquad \text{also} \qquad f''(z) = -e^{iz} \ .$$

Es folgt

$$f''(0) = -1 = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\kappa_1(0)} \frac{e^{iz}}{z^3} \, \mathrm{d}z \ , \quad \text{also} \quad \int_{\kappa_1(0)} \frac{e^{iz}}{z^3} \, \mathrm{d}z = -\pi i \ .$$

Satz 23.2.1 bzw. Satz 23.2.2 haben zahlreiche wichtige Folgerungen exemplarisch sei genannt

Satz 23.2.3 *(Satz von Liouville)*

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (Bezeichnung: f ist eine ganze Funktion) und beschränkt (d.h. $|f| \leq$ konst.), so ist f konstant.

Bemerkung. Man vergleiche Satz 23.2.3 wieder mit dem reellen Fall, d.h. man vergleiche etwa sin und cos im Reellen und im Komplexen.