Kapitel 25

Der Residuensatz

25.1 Der Satz (Residuum)

Der Residuensatz ist eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Definition 25.1.1

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, f differenzierbar auf $B'_r(z_0)$. Für $0 < \rho < r$ heißt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} f(z)\, \mathrm{d}z =: \mathrm{res}_{z_0}\, \mathrm{f}$$

das Residuum von f in der isolierten Singularität z_0.

Bemerkungen.

i) Nach dem Cauchyschen Integralsatz (bzw. dessen Verallgemeinerung) hängt $\mathrm{res}_{z_0}\, \mathrm{f}$ nicht von ρ ab. Außerdem kann wieder statt $\kappa_\rho(z_0)$ ein beliebiger, einfacher geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg in $B'_r(z_0)$ betrachtet werden.

ii) Nach Satz 24.2.2 ist das Residuum von f in z_0 genau der Koeffizient a_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_0.

iii) Bemerkung *ii)* kann wie folgt veranschaulicht werden: Schreibt man f lokal als Laurent-Reihe und vertauscht man Integration und Summation, so verschwinden nach Satz 22.3.1 in der Summe alle Integrale über $a_k(z-z_0)^k$, $k \neq -1$. Lediglich das Integral mit $k = -1$ gibt einen Beitrag.

Beispiele.

i) Es sei
$$f(z) = \frac{3}{z-i}\ , \qquad z \in \mathbb{C} - \{i\}\ .$$
Nach Satz 22.3.1 ist für $\rho > 0$
$$\int_{\kappa_\rho(i)} \frac{1}{z-i}\, \mathrm{d}z = 2\pi i\ ,$$
also folgt
$$\mathrm{res_i\ f(z)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[3 \cdot 2\pi \mathrm{i}] = 3\ .$$
Zu beachten ist hier: $3/(z-i)$ ist bereits die Laurent-Reihe von f um den Punkt $z_0 = i$, also $a_{-1} = 3$.

ii) Es sei
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}\ , \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}\ .$$
Es wurde bereits gezeigt:
$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}\ ,$$
also ist $a_{-1} = 1$ und $\mathrm{res_0\ f} = 1$.

Die Integraldarstellung des Residuums sowie die Entwicklung von f in eine Laurent-Reihe können in der Praxis allerdings Schwierigkeiten bereiten, d.h. es stellt sich die Frage nach:

Hilfsmittel zur Berechnung von Residuen?

Satz 25.1.1

i) Es sei $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$*, wobei g, h holomorph seien auf* $B_r(z_0)$*. Weiterhin sei* $g(z_0) \neq 0$*,* $h(z_0) = 0$ *und* $h'(z_0) \neq 0$*. Dann ist das Residuum von f in* z_0

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \mathrm{res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

ii) Die meromorphe Funktion f habe in $z_0 \in \mathbb{C}$ *einen Pol der Ordnung p. Dann gilt*

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] \right] .$$

Beispiele.

i) Es sei

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{\sin(z)} , \qquad 0 < |z| < \frac{\pi}{2} , \qquad z_0 = 0 .$$

Satz 25.1.1, i), ist anwendbar mit $g(z) = z^2 + 4$, $h(z) = \sin(z)$.

$$\mathrm{res}_0 \frac{z^2 + 4}{\sin(z)} = \frac{4}{\cos(0)} = 4 .$$

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3} , \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\} , \qquad z_0 = 0 .$$

Hier ist z_0 ein Pol der Ordnung 3 und es gilt nach Satz 25.1.1, ii),

$$\mathrm{res}_0 \frac{e^{iz}}{z^3} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} e^{iz} \right] = -\frac{1}{2} .$$

Der Hauptsatz dieses Kapitels lautet nun:

Satz 25.1.2 *(Der Residuensatz)*

Es sei γ ein einfacher geschlossener Integrationsweg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, der im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werde. Die Funktion f sei definiert und differenzierbar in G mit Ausnahme von endlich vielen isolierten Singularitäten. Die Spur von γ treffe keine dieser Singularitäten. Sind $z_1, \ldots, z_N$ die Singularitäten, die von γ eingeschlossen werden, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{\mathrm{z_k}}\, \mathrm{f}\ .$$

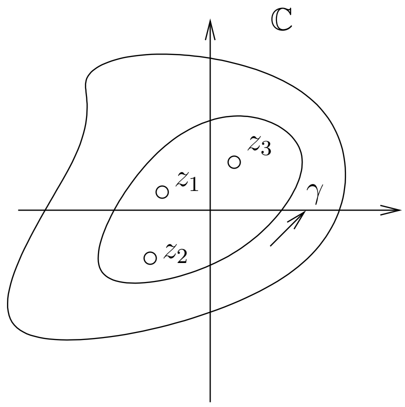

Abbildung 25.1: Zum Residuensatz.

Bemerkungen.

i) Allein die Kenntnis der Residuen ermöglicht also die Berechnung des Kurvenintegrals.

ii) Ist f holomorph auf G (keine Singularitäten) so erkennt man den Cauchyschen Integralsatz als Spezialfall.

Beispiele.

i) Betrachtet sei das Standardbeispiel $f(z) = z^{-1}$. Das Residuum $\mathrm{res}_0\, \mathrm{f}$ von f in $z_0 = 0$ ist der Koeffizient $a_{-1} = 1$ der Laurent-Reihe von f um $z_0 = 0$. Es folgt (vgl. Satz 22.3.1)

$$\int_{\kappa_\rho(0)} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_0\, \mathrm{f} = 2\pi \mathrm{i}\ .$$

Es sei $f(z) = z^{-2}$. Hier gilt $\mathrm{res}_0\, \mathrm{f} = 0$ (wegen $a_{-1} = 0$) und (vgl. wieder Satz 22.3.1)

$$\int_{\kappa_\rho(0)} \frac{1}{z^2}\, \mathrm{d}z = 0\ .$$

ii) Es sei $G = \mathbb{C}$ und

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}\ , \qquad z \neq \pm i\ .$$

Nach 25.1.1 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_\mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^\mathrm{z}}{1+\mathrm{z}^2} &= \frac{e^z}{2z}_{|z=i} = \frac{e^i}{2i}\ , \\ \mathrm{res}_{-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^\mathrm{z}}{1+\mathrm{z}^2} &= -\frac{e^i}{2i}\ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\kappa_3(i)} \frac{e^z}{1+z^2}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \underbrace{\left[\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right]}_{\frac{2i\sin(1)}{2i}} = 2\pi i \sin(1)\ .$$

Der Residuensatz hilft auch bei der Berechnung reeller Integrale, beispielsweise gilt

Satz 25.1.3

Es sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion mit Polyno-

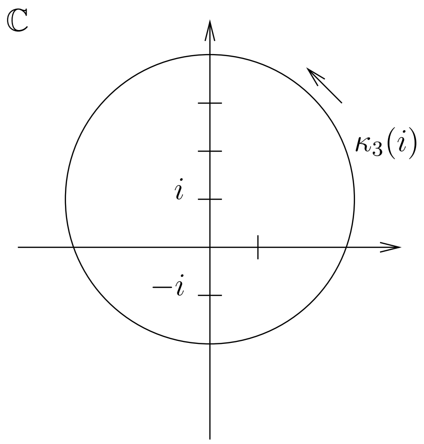

Abbildung 25.2: Ein Beispiel zum Residuensatz.

men $P(z)$, $Q(z)$. Der Grad von Q sei um mindestens 2 höher als der von P, Q habe keine reellen Nullstellen. Sind dann $z_1, \ldots, z_N$ die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene $\mathrm{Im}\, z > 0$, *so gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{\mathrm{z_k}} \frac{\mathrm{P(z)}}{\mathrm{Q(z)}} \; .$$

Bemerkung. Ist der Grad von Q nur um eins höher als der Grad von P, so divergiert das Integral auf der linken Seite.

Beispiel. Gesucht sei das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x \; .$$

Mit $P(z) = 1$, $Q(z) = (1+z^2)^2$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. In der oberen Halbebene liegt die Nullstelle $z = i$ mit der

Vielfachheit 2. Nach Satz 25.1.1 folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{res_i}\,\frac{1}{(1+\mathrm{z}^2)^2} &= \lim_{z\to i}\left[\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2\frac{1}{(1+z^2)^2}\Big]\right] \\
&= \lim_{z\to i}\left[\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\Big]\right] \\
&= \lim_{z\to i}\Big[\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\Big] \\
&= \lim_{z\to i}\Big[-\frac{2}{(z+i)^3}\Big] \;=\; \frac{1}{4i} \;=\; -\frac{i}{4}\,.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\big(-\frac{i}{4}\big) = \frac{\pi}{2}\,.$$