Kapitel 24

Entwicklungen holomorpher Funktionen

Reihenentwicklungen spielen in der Funktionentheorie eine ganz besodere Rolle. Im Reellen wurden Potenzreihen in Kapitel 5.2 besprochen, das komplexe Gegenstück wurde in Kapitel 7.2 behandelt. Auf die dort gelegten Grundlagen wird hier aufgebaut.

24.1 Taylor-Reihen (Potenzreihen und holomorphe Funktionen; Differentiation von Potenzreihen)

Cauchys Beispiel aus Kapitel 13.1 zeigt, dass im Reellen selbst unendlich oft differenzierbare Funktion nicht unbedingt durch ihre Taylor-Reihe dargestellt werden. Auch diesbezüglich sieht die Situation in der komplexen Analysis anders aus, wie der vorliegende Paragraph zeigen wird.

Zunächst sei jedoch an die wichtigste Potenzreihe, die geometrische Reihe erinnert:

Beispiel. Man betrachte die Reihe (vgl. Kapitel 7.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \, .$$

Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \, , \qquad \text{falls } \; z \neq 1 \, .$$

Für $|z| < 1$ ist $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$, also folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1 \, .$$

Für $|z| \geq 1$ ist $\{z^n\}$ keine Nullfolge, die geometrische Reihe divergiert.

Nun soll die Ableitung dder Funktion $1/(1-z)$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes für Reihen (Satz 5.3.1) analysiert werden: Für $|z| < 1$ ist

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-z}\right)' &= \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \, .
\end{aligned}$$

Mit $j = n+1$ ist gezeigt

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{j=1}^{\infty} j z^{j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' \, .$$

In Verallgemeinerung des Beispiels besagt der folgende Satz, dass durch Potenzreihen holomorphe Funktionen definiert sind und dass sich die Ableitung durch gliedweise Differentiation berechnen lässt (vgl. auch Satz 11.1.7).

Satz 24.1.1 *(Differentiation von Potenzreihen)*

Besitzt eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ den Konvergenzradius $r > 0$, so ist dadurch in der Kreisscheibe $B_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion $f(z)$ mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

als Ableitung gegeben. Diese Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie $P(z)$.

Beispiel. Man betrachte

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Es ist $r = \infty$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z .$$

Nach Satz 24.1.1 sind durch Potenzreihen holomorphe Funktionen definiert. Umgekehrt stellt sich die Frage, ob holomorphe Funktionen immer als Potenzreihe, d.h. durch ihre Taylor-Reihe, dargestellt werden können.

Satz 24.1.2

Es sei $f(z)$ holomorph für $|z - z_0| < r$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann ist f eindeutig darstellbar durch eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Die Reihe konvergiert in $B_r(z_0)$, und die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

Bemerkungen.

i) Nach Satz 23.2.2 gilt für $0 < \rho < r$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z .$$

Hier kann $\kappa_\rho(z_0)$ auch durch einen beliebigen, einfachen geschlossenen Integrationsweg ersetzt werden, der im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird, ganz in $B_r(z_0)$ liegt und z_0 im Innern enthält.

ii) Ist f in einer offenen Menge U holomorph, $z_0 \in U$, so konvergiert die Taylor-Reihe in der größten Kreisscheibe um z_0, die noch in U liegt.

Typisches Beispiel. Für $z \in U = \mathbb{C} - \{1, -2\}$ sei

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} .$$

Gesucht sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe um $z_0 = i$, die nach Bemerkung ii) für $|z - i| < \sqrt{2}$ konvergiert.

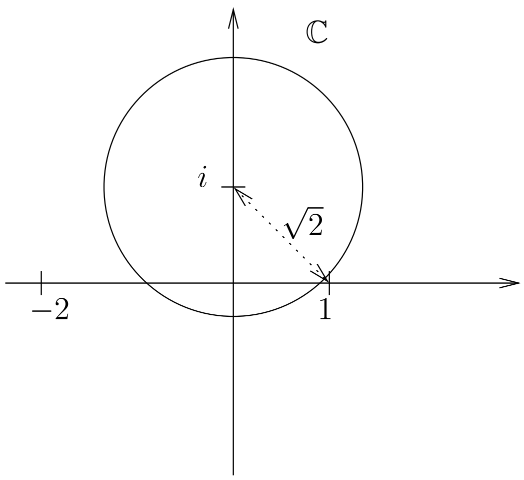

Abbildung 24.1: Zur Taylorreihe von f um i.

Die Koeffizienten können im Prinzip nach Bemerkung i) berechnet werden, es gilt aber auch (vgl. die Partialbruchzerlegung aus Kapitel 12.3)

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z} .$$

Für $|z-i| < \sqrt{2}$ gilt $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$, und mit Hilfe der geometrischen Reihe findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n . \end{aligned}$$

Analog gilt wegen $|(z-i)/(2+i)| < 1$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+i+(z-i)} = \frac{1}{2+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}}$$

$$= \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-i}{2+i}\Big)^n .$$

Man erhält die Taylor-Entwicklung um $z_0 = i$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]}_{=a_n} (z-i)^n .$$

24.2 Laurent-Reihen (holomorphe Funktionen auf Kreisringen; Haupt- und Nebenteil einer Laurent-Reihe; Singularität; gelochte Kreisscheibe; Charakterisierung von isolierten Singularitäten)

Betrachtet man Funktionen wie $f(z) = g(z)z^{-1}$, $g(z)$ holomorph, so ist der Punkt $z = 0$ von besonderer Bedeutung und bietet sich als Entwicklungspunkt einer Reihenentwicklung an. Die Funktion f ist jedoch in diesem Punkt nicht definiert, f ist nicht holomorph auf einer Kreisscheibe um 0.

Es ist f jedoch holomorph auf Kreisringen um den Nullpunkt. Diese Situation soll nun studiert werden: Bei der Entwicklung von f sind dann negative Potenzen mitzunehmen, man spricht von der sogenannten Laurent[1]-Entwicklung der Funktion. Im obigen Beispiel etwa werden die Exponenten in der Taylor-Entwicklung von g um eins vermindert werden.

Im Folgenden sei für $0 \le r_1 < r_2$ und für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$A_{r_1,r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} :\ r_1 < |z - z_0| < r_2\} .$$

[1]P.A. Laurent, 1813–1854; Le Havre.

Definition 24.2.1

Mit $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt z_0. Es heißt weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

der Nebenteil (oder der Regulärteil) und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

der Hauptteil der Laurent-Reihe.

Konvergenz einer Laurent-Reihe?

Bei der Frage nach der möglichen Konvergenz einer Laurent-Reihe ist zunächst zu beachten, dass der Nebenteil eine Potenzreihe im üblichen Sinne ist. Es sei angenommen, dass diese die im Konvergenzkreis $B_{r_2}(z_0)$ konvergiere.

Zur Analyse des Hauptteils setzt man $w = (z-z_0)^{-1}$. Mit dieser Substitution kann der Hauptteil geschrieben werden als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \, .$$

Dies wiederum ist eine Potenzreihe in w, man nehme an, sie konvergiere für $|w| < \rho$, also für

$$|z-z_0| > \frac{1}{\rho} =: r_1 \, .$$

Ist nun $0 < r_1 < r_2$, so konvergiert die Laurent-Reihe also auf dem Kreisring $A_{r_1,r_2}(z_0)$. Ist $r_1 = r_2$, so kann die Reihe höchstens für $|z| = r_1 = r_2$ konvergieren, ist $r_1 > r_2$, so kann die Reihe nirgends konvergieren.

Satz 24.2.1

Für eine Laurent-Reihe gilt eine der drei folgenden Alternativen:

i) Die Reihe konvergiert nicht.

ii) Die Reihe konvergiert für gewisse Punkte einer Kreislinie um z_0.

iii) Die Reihe konvergiert auf einem Kreisring um z_0.

Kann eine auf einem Kreisring holomorphe Funktion durch eine Laurent-Reihe dargestellt werden?

Satz 24.2.2

Es sei f holomorph auf einem Kreisring $A_{r_1,r_2}(z_0)$, $0 \leq r_1 < r_2$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist f auf $A_{r_1,r_2}(z_0)$ eindeutig darstellbar als Laurent-Reihe (Laurent-Entwicklung um den Entwicklungspunkt z_0)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ ,$$

wobei die Koeffizienten für alle $k \in \mathbb{Z}$ gegeben sind durch ($r_1 < \rho < r_2$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z \ .$$

Bemerkungen.

i) Wieder können die a_k auch durch Integration über einen einfachen, geschlossenen Intergrationsweg berechnet werden, der ganz in $A_{r_1,r_2}(z_0)$ liegt und im positiven Sinne durchlaufen wird.

ii) Eine Taylor-Reihe ist eine Laurent-Reihe mit $a_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Es sei wieder

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z} \ .$$

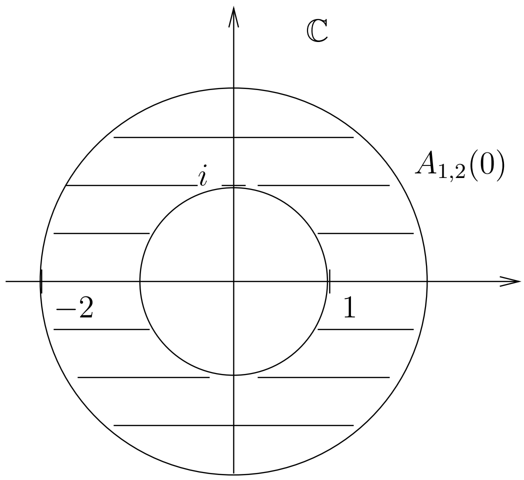

Abbildung 24.2: f ist holomorph auf $A_{1,2}(0)$.

Mit $z_0 = 0$ ist f holomorph auf $A_{1,2}(z_0)$. Wie oben sieht man mit Hilfe der Konvergenz der geometrischen Reihe und wegen $|z^{-1}|, |z/2| < 1$ auf $A_{1,2}(0)$ (man beachte: Auf $A_{1,2}(0)$ ist $|z| \geq 1$ und $1/(1-z)$ kann nicht als konvergente geometrische Reihe geschrieben werden.):

$$\frac{1}{1-z} \;=\; -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \;=\; -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n \,,$$

$$\frac{1}{2+z} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z}{2}\Big)^n \,.$$

Die Laurent-Reihe von $f(z)$ um 0 ist demnach für $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n \, .$$

Mit Hilfe von Satz 24.2.2 können Singularitäten einer Funktion charakterisiert werden.

Notation. Zu $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, bezeichne $B'_r(z_0)$ die gelochte Kreisscheibe vom Radius r um z_0:

$$B'_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : \; 0 < |z - z_0| < r\} \, .$$

Definition 24.2.2

Ist f auf $B'_r(z_0)$ definiert und differenzierbar, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f. Dabei muss f nicht in z_0 definiert sein.

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2+z)(z-i)} \, , \qquad z \in \mathbb{C} - \{1, -2, i\} \, ,$$

hat isolierte Singularitäten in den Punkten $z_1 = 1$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$.

Im folgenden werden stets isolierte Singularitäten betrachtet, deren Charakterisierung lautet:

Definition 24.2.3

Es sei f auf $B'_r(z_0)$ differenzierbar.

i) Der Punkt z_0 heißt hebbare Singularität, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 verschwindet.

ii) Der Punkt z_0 heißt Pol der Ordnung p, $p \in \mathbb{N}$, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 von der Form ist

$$\sum_{n=1}^{p} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \, , \qquad a_{-p} \neq 0 \, .$$

Die Funktion f heißt in diesem Fall meromorph.

iii) Der Punkt z_0 heißt wesentliche Singularität, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 unendlich viele nicht-verschwindende Glieder hat.

Beispiele.

i) Es sei

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \qquad z_0 = 0 .$$

Dann ist f zwar in z_0 nicht definiert, es gilt aber:

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z}\Big[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots\Big] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots .$$

Der Hauptteil der Laurentreihe um 0 verschwindet, $\sin(z)/z$ lässt sich durch den Wert 1 holomorph in den Nullpunkt fortsetzen (hebbare Singularität).

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{1, -2\} .$$

Hier sind $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$ Pole der Ordnung 1.

iii) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{i\} .$$

In diesem Beispiel ist $z_0 = i$ ein Pol der Ordnung 3.

iv) Es sei

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\} .$$

Es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{-1})^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} ,$$

also ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.