Kapitel 26

Fourier-Reihen

26.1 Einführung (Spektrum; harmonische Analyse; Periode einer Funktion; trigonometrische Reihen; trigonometrische Polynome; gliedweise Integration; Integration und Grenzübergang; Fourier-Koeffizienten)

Bevor in den nachfolgenden Kapiteln der kontinuierliche Fall der Fourier[1]-Transformation bzw. der Laplace-Transformation diskutiert wird, soll hier zunächst das diskrete Spektrum periodischer Funktionen studiert werden.

Eine ausführliche Schilderung der Bedeutung von Fourier-Reihen in der Entwicklung der Mathematik findet sich in [Hi1].

Frage. Das Beispiel einer schwingenden Saite motiviert die Frage: Lässt sich eine periodische Funktion als Überlagerung oder Superposition von Grund- und Oberschwingungen darstellen? (harmonische Analyse)

Es geht also um das Studium periodischer Vorgänge wie die Erzeugung von Wechselstrom, mechanische Schwingungen, Analyse von Messkurven etc.

Dabei heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode $T \neq 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x+T) = f(x)$.

[1] J.B.J. Baron de Fourier, 1768–1830; Grenoble, Paris.

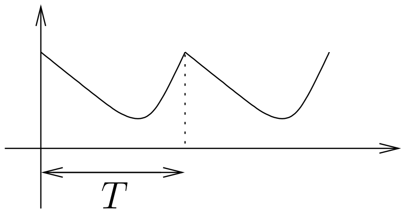

Abbildung 26.1: Eine periodische Funktion.

Beispiele.

i) Konstante Funktionen, trigonometrische Funktionen, ...

ii) Für beliebige Amplituden A_1, $A_2 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$A_1 \sin(\omega_1 x) + A_2 \sin(\omega_2 x)$$

periodisch, falls das Verhältnis der Kreisfrequenzen (und damit der Perioden) rational ist ($\rightsquigarrow$ Übungen).

Im Folgenden werden zunächst o.E. 2π-periodische Funktionen betrachtet.

Fourier-Reihen sind nun trigonometrische Reihen der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ , \qquad a_n,\ b_n \in \mathbb{R} \ ,$$

die Partialsummen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißen trigonometrische Polynome.

Bemerkung. Die Funktion $A_1 \sin(x) + A_2 \sin(\omega_2 x)$ hat Periode 2π, falls (wie in obiger Übung zu zeigen) $\omega_2 \in \mathbb{N}$, d.h. trigonometrische Reihen mit obigen Frequenzen sind die Grundlage der harmonischen Analyse.

Fragen. Präzisiert lauten die entscheidenden Frage dieses Kapitels:

i) Lässt sich eine 2π-periodische Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickeln?

ii) Wenn ja, in welchem Sinne konvergiert die Reihe?

Zur Vorbereitung benötigt man das folgende Lemma, welches als Übung nachzurechnen ist:

Lemma 26.1.1 *(Eigenschaften trigonometrischer Funktionen)*

i) *Für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$ gelten die Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0 \quad \textit{für } m \neq n\,; \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= 0 \quad \textit{für } m \neq n\,; \\ \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= 0\,. \end{aligned}$$

ii) *Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Normierungsbeziehungen*

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \textit{für } n \in \mathbb{N}\,, \\ 2\pi & \textit{für } n = 0\,; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \textit{für } n \in \mathbb{N}\,, \\ 0 & \textit{für } n = 0\,. \end{cases}$$

Zunächst wird einfach angenommen, dass eine formal gebildete Fourier-Reihe gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Unter dieser Annahme folgt:

Satz 26.1.1

Konvergiert die Fourier-Reihe (die Folge der Partialsummen)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

im Intervall $[0, 2\pi]$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f(x)$*, so ist* f *stetig und es gilt*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \,, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \,, \qquad n = 1, 2, \ldots \,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Aus der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe gegen eine Funktion f folgen Darstellungsformeln für die Koeffizienten a_n und b_n.

Zum Beweis von Satz 26.1.1 benötigt man den folgenden Satz, der ohne Beweis angegeben sei:

Satz 26.1.2 *(gliedweise Integration, Integration & Grenzübergang)*

Betrachtet sei auf einem Intervall I *eine Folge von Funktionen* $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... *Für alle* $x \in I$ *existiere der Grenzwert*

$$g(x) := \lim_{N \to \infty} g_N(x) \,.$$

Sind die g_N *auf dem Intervall* $I = [a, b]$ *stetig und konvergieren sie gleichmäßig gegen* $g(x)$*, so gilt*

$$\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{N \to \infty} g_N(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{N \to \infty} \int_a^b g_N(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Im Fall $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} h_n(x)$ folgt (mit obiger Notation)

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b h_n(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

Beweis von Satz 26.1.1 Die Stetigkeit von

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

folgt aus der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz. Betrachtet seien nun die Partialsummen

$$g_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \, , \qquad N \in \mathbb{N} \, .$$

Für ein fixiertes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Annahme

$$g_N(x) \cos(kx) \overset{N\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \cos(kx)$$

($\sin(kx)$ analog). Also ist nach Satz 26.1.2 gliedweise Integration zulässig. Lemma 26.1.1 impliziert

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\
&= a_k \pi
\end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung. Der Satz beantwortet nicht die Frage nach der Darstellbarkeit einer gegebenen Funktion f als Fourier-Reihe (gleichmäßige Konvergenz war vorausgesetzt), er motiviert aber die nachfolgende Definition.

Definition 26.1.1

Die reellwertige Funktion f sei auf $[0, 2\pi]$ definiert und integrierbar.

i) Die Zahlen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots\,, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

heißen Fourier-Koeffizienten von f.

ii) Die mit diesen Koeffizienten formal gebildete Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

heißt Fourier-Reihe von f.

Beispiele.

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π,

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le \pi\,, \\ 2\pi - x\,, & \pi \le x \le 2\pi\,. \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi\,, \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2m\,, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{für } n = 2m+1\,, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}\,, \\ b_n &= 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe ist gleichmäßig konvergent ($\rightsquigarrow$ Übungen).

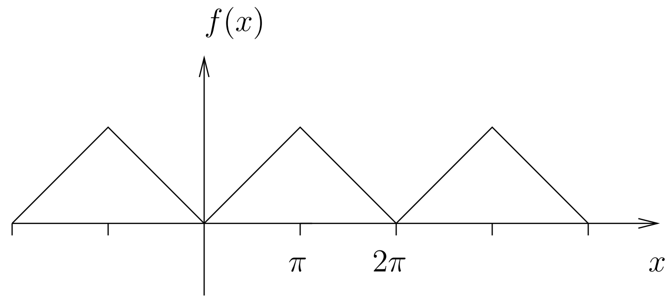

Abbildung 26.2: Die Funktion $f(x)$.

ii) Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so folgt ($\rightsquigarrow$ Übung)

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}\,, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}_0\,. \end{aligned}$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}_0\,, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

26.2 Der Satz (Sägezahnfunktion; Gibbs-Phänomen; stückweise glatte Funktion; mittlere quadratische Abweichung; Parsevalsche Gleichung)

Musterbeispiel dieses Kapitels. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode 2π und

$$f(x) = \pi - x \quad \text{für } \ 0 \le x < 2\pi \quad \text{(Sägezahnfunktion)}\,.$$

In diesem Fall ist f ungerade, also $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (wie f in den Sprungstellen definiert ist, spielt für dieses Argument keine Rolle).

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[x\Big(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\ \mathrm{d}x\right] = \frac{2}{n}\,. \end{aligned}$$

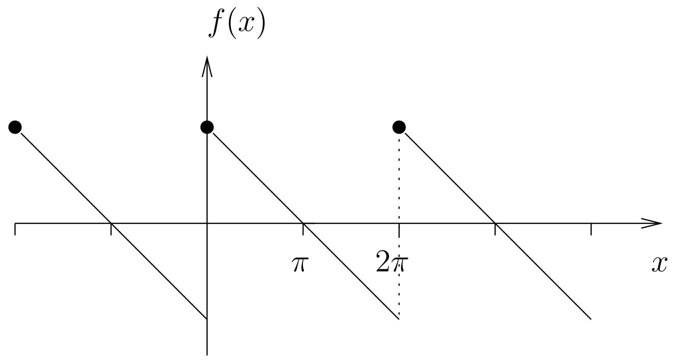

Abbildung 26.3: Die Sägezahnfunktion.

Die (formale) Fourier-Reihe lautet:

$$2\Big\{\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \dots\Big\} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \ .$$

Zur Konvergenz der Reihe. Betrachtet seien dazu die Partialsummen

$$S_N(x) := 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}$$

sowie die Differenz

$$R_N(x) := S_N(x) - f(x) \ .$$

Man kann zeigen: Für $x \in (0, 2\pi)$ gilt

$$|R_N(x)| \le \frac{4}{(2N+1)\sin(x/2)} \ ,$$

d.h.: Gleichmäßige Konvergenz gegen $f(x)$ gilt nur auf Teilintervallen der Form $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ (weg von der Sprungstelle).

Für $x = 0$, $x = 2\pi$, ...ist $S_N = 0$ ("Mittelwert des Sprungs"), es liegt keine Konvergenz der Reihe gegen die Funktion in den Sprungstellen vor.

Man kann weiter zeigen: Für $x_N = \pi/(N + 1/2)$ und für alle N hinreichend groß gilt

$$R_N(x_N) \overset{\approx}{\geq} 0.1789 \cdot \pi \ ,$$

d.h. auch wenn N sehr groß wird überschwingen die Partialsummen den Wert π um ca. 18 % (Gibbs[2]-Phänomen).

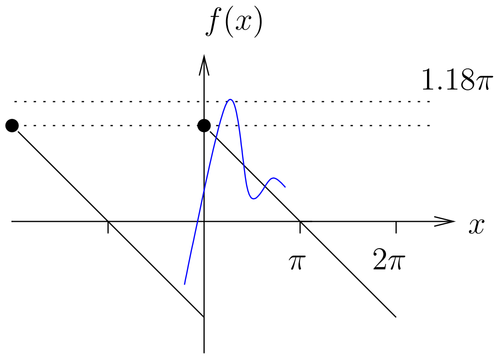

Abbildung 26.4: Das Gibbs-Phänomen.

Bevor nun das Hauptergebnis dieses Kapitels formuliert werden kann, ist eine geeignete Funktionenklasse einzuführen.

Definition 26.2.1

i) Eine Sprungstelle einer Funktion f ist eine Unstetigkeitsstelle x_0 von f, für die rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert

$$f(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \ , \qquad f(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

exitieren. Die Sprunghöhe ist dabei $h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$.

ii) Eine Funktion f heißt in $[a, b]$ stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ gibt, sodass f in jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte $f(a^+)$, $f(b^-)$, $f(x_j^+)$, $f(x_j^-)$, $1 \leq j \leq n-1$ existieren.

[2]J.W. Gibbs, 1839–1903; New Haven.

iii) Eine Funktion f heißt in $[a, b]$ stückweise glatt, wenn f und f' in $[a, b]$ stückweise stetig sind.

Bemerkungen.

i) Eine stückweise glatte Funktion hat höchstens endlich viele Sprungstellen und endlich viele “Ecken”.

ii) Die Bedeutung stückweise glatter Funktionen in den Anwendungen wird deutlich, wenn man etwa an Einschaltvorgänge denkt.

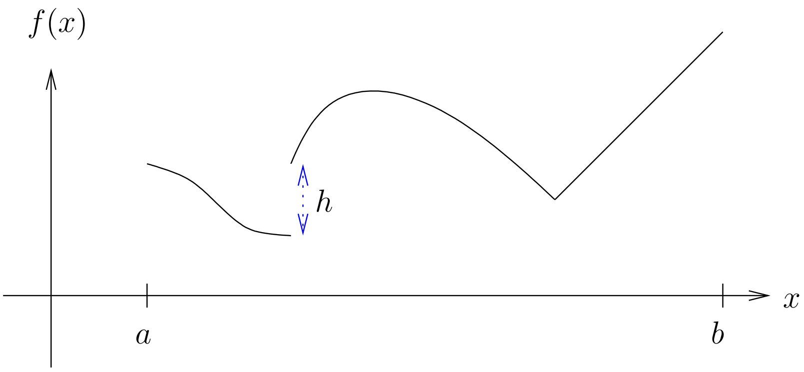

Abbildung 26.5: Eine stückweise glatte Funktion.

Satz 26.2.1

Die 2π-periodische Funktion f sei in $[0, 2\pi]$ stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f stetig an der Stelle x, so gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \; .$$

Ist x eine Sprungstelle von f, so gilt

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(bx)) \ .$$

In jedem abgeschlossenen Intervall, in dem f stetig ist, ist die Reihe gleichmäßig konvergent.

Beispiel. Im obigen Beispiel $i)$ ist f stückweise glatt und stetig, also

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x \ , & 0 \le x < \pi \\ 2\pi - x \ , & \pi \le x < 2\pi \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2} \ .$$

Insbesondere folgt mit der Wahl $x = 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Bemerkungen.

i) Man überlege sich, warum hier viel schwächere Bedingungen an f zu stellen sind als es für die Entwicklung in Taylor-Reihen norwendig war.

ii) Die Diskussion von periodischen Funktionen f mit Periode $T > 0$, $T \neq 2\pi$, erfolgt analog (mittels der Transformation $u = 2\pi x/T$). Die Fourier-Reihe ist dann

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)\right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \, \mathrm{d}x \ , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ , \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \, \mathrm{d}x \ , \qquad n = 1, 2, \dots \ . \end{aligned}$$

iii) Statt des Intervalls $[0, T]$ können analog Intervalle der Form $[a, a+T]$, $a \in \mathbb{R}$, betrachtet werden.

iv) Approximiert man eine 2π-periodische Funktion mit einem trigonometrischen Polynom

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$

mit Koeffizienten derart, dass

$$Q_n := \int_0^{2\pi} [f(x) - P_n(x)]^2 \, dx$$

(mittlere quadratische Abweichung) minimal wird (Approximation im quadratischen Mittel), so erhält man genau die Fourier-Koeffizienten.

v) Gilt $\lim_{n\to\infty} Q_n = 0$ (konvergiert also die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f), so gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx$$

(zu beachten: Konvergenz im quadratischen Mittel impliziert nicht punktweise Konvergenz).

Komplexe Notation. Man setzt im Fall einer 2π-periodischen Funktion

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \; .$$

Dabei beobachtet man zunächst

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \; ,$$

d.h. es gilt

$$c_n + c_{-n} = a_n \quad \text{und} \quad c_n - c_{-n} = -ib_n \; .$$

Man beobachtet weiter:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(\cos(nx) - i\sin(nx)) \\ &= c_0\cos(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n})\cos(nx) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} i(c_n - c_{-n})\sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \ ,\end{aligned}$$

die Fourier-Reihe ist in komplexer Schreibweise dargestellt.

Hat f die Periode $T > 0$, so setzt man anlog (in diesem Beispiel symmetrisch zum Ursprung)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,\mathrm{d}x \ ,$$

und die Fourier-Reihe wird geschrieben als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \ .$$

Bemerkung. Zum Abschluss dieses Kapitels sei nochmals festgehalten: Nach Satz 26.2.1 kann eine periodische Funktion spektral zerlegt werden, die Gesamtheit der harmonischen Schwingungen, die zur Superposition beitragen, heißt das Spektrum von f. Im Fall einer 2π-periodischen Funktion ist die Frequenz der Grundschwingung 1, die Frequenzen der Oberschwingungen sind die natürliche Zahlen größer als 1. Im Fall einer T-periodischen Funktion ist die Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, die Frequenzen der Oberschwingungen sind Vielfache davon. Die Spektralzerlegung kann etwa mit Hilfe eines Amplitudenspekrums visualisiert werden. Dabei wird $|c_n|$ gegen die Frequenz aufgetragen (vgl. Abbildung 27.3 und Abbildung 27.5 des nächsten Kapitels: Wegen $c_{-n} = \overline{c_n}$ wird dabei nur die positive Achse berücksichtigt, das konstante Glied ist ebenfalls weggelassen.).