Kapitel 27

Fourier-Transformation

27.1 Einführung (periodische Fortsetzung; kontinuierliches Spektrum)

Die Integraltransformation im Mittelpunkt der hier ausgeführten Betrachtungen ist die Fourier-Transformationen. Es sei vorweggeschickt, dass mittels Integraltransformationen ein Problem derart transformiert werden soll, dass es in der neuen Form gelöst werden kann. Der wesentliche Punkt ist, dass anschließend eine Rücktransformation möglich sein muss, die auf die Lösung des ursprünglichen Problems führt. M.a.W. muss eine Intergaltransformation invertierbar sein.

Für die folgenden Betrachtungen gibt es eine Vielzahl von Anwendungen etwa in der mathematischen Physik. Man denke vor Allem auch an die Informationstechnologie (Signale senden, übertragen, empfangen, analysieren, verarbeiten …).

Idee. Man betrachte als Standardbeispiel dieses Kapitels die nicht periodische Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad -\pi \le x \le \pi\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad |x| > \pi\,. \end{cases}$$

Studiert wird also ein typisches Ein- und Ausschaltsignal.

Da die Funktion nicht-periodisch ist, kann die Theorie aus Kapitel 26 nicht angewandt werden. Deshalb betrachtet man zunächst die Einschränkung $f_{|[-2\pi,2\pi]}$ der Funktion f auf das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$, d.h. $f_{|[-2\pi,2\pi]}$ ist lediglich definiert auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und es

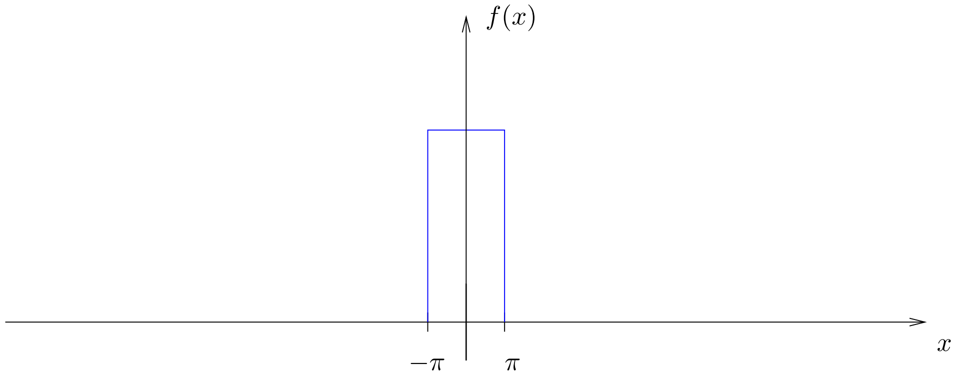

Abbildung 27.1: Das Signal.

gilt für alle x mit $|x| \leq 2\pi$: $f_{|[-2\pi,2\pi]}(x) = f(x)$. Diese Funktion wird fortgesetzt als Funktion mit der Periode 4π, so wie es in Abbildung 27.2 dargestellt ist. Es ist eine periodische Funktion mit der Periode 4π entstanden, deren Spektrum nach Kapitel 26 analysiert werden kann. Es handelt sich dabei um ein diskretes Spektrum, die Grundschwingung hat die Frequenz $1/2$, die Oberschwingungen sind Vielfache davon (vgl. Abbildung 27.3).

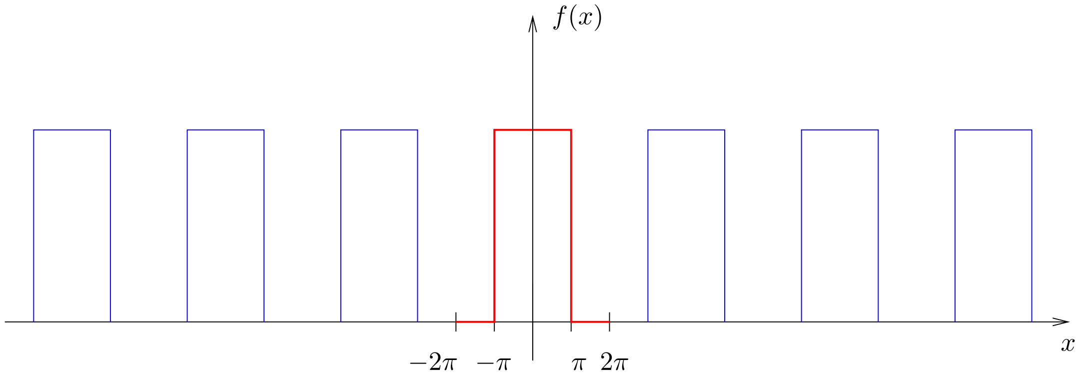

Abbildung 27.2: Die 4π-periodische Fortsetzung.

In der obigen Konstruktion (Einschränkung und periodische Fortsetzung) ersetze man nun 2π durch $l\pi$, $l \in \mathbb{N}$. Die Situation ist in Abbildung 27.4 angedeutet. Die Grundschwingung hat nun die Frequenz $1/l$, die Oberschwingungen sind wiederum Vielfache davon. Man erkennt in Abbildung 27.5, dass die Eintragungen des Spektrums für große l immer näher zusammenrücken.

Abbildung 27.4 suggeriert nun einerseits, dass sich beim Grenzübergang $l \to \infty$ das Spektrum des nicht-periodischen Ein- und Ausschalt-

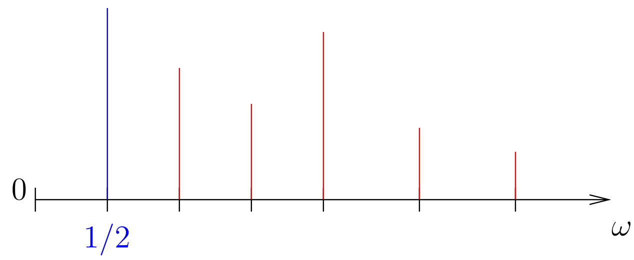

Abbildung 27.3: Das Spektrum der 4π-periodischen Fortsetzung.

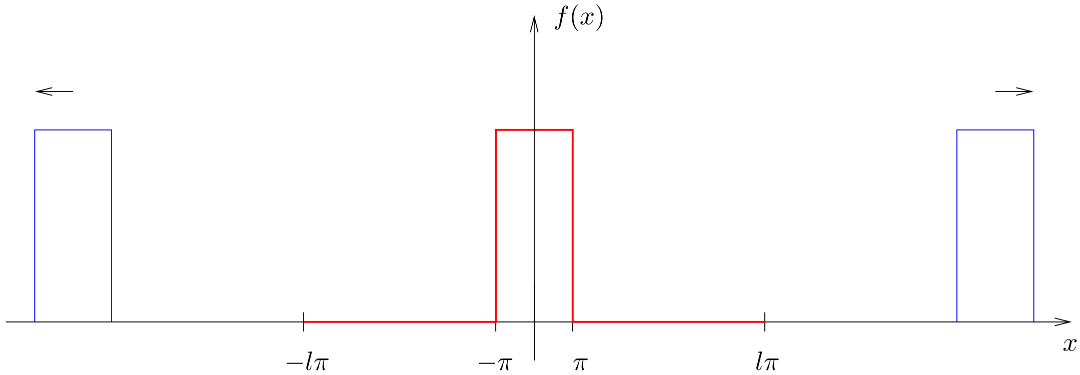

Abbildung 27.4: Die $2l\pi$-periodische Fortsetzung.

signals ergeben sollte.

Abbildung 27.5 suggeriert andererseits, dass beim Grenzübergang aus dem diskreten ein kontinuierliches Spektrum entstehen sollte.

Die nachfolgende "präzisierte Heuristik" ist aus zwei Gründen recht ausführlich gehalten:

i) Sie bietet die schöne Möglichkeit, eine Vielzahl von Grundbegriffen der Analysis (Konvergenz, Konvergenz von Reihen, uneigentliche Integrale, Riemannsche Zwischensummen, Vertauschung von Grenzwerten, absolute Konvergenz, harmonische Reihe, Konvergenzkriterium von Leibniz) anhand eines wesentlichen Anwendungsbeispiels ins Gedächtnis zu rufen bzw. zu zeigen, wie diese ineinander greifen.

ii) In der Literatur werden zwei unterschiedliche Zugänge gewählt: Entweder wird ein rigoroser mathematischer Beweis präsentiert, was hier nicht geschehen soll. Oder aber es wird versucht, die

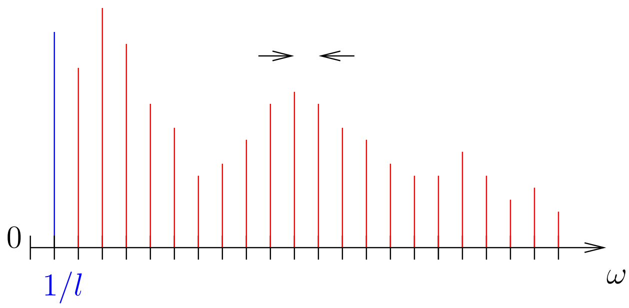

Abbildung 27.5: Das Spektrum der $l\pi$-periodischen Fortsetzung.

Fourier-Transformation mit Grenzwertbetrachtungen aus dem periodischen Fall herzuleiten, wie es bereits angedeutet wurde. Dabei werden leider oft in unzulässiger Weise Grenzwerte vertauscht und die entscheidende Idee geht aufgrund einer unsauberen Notation verloren. In der Tat konnte für die folgenden Rechnungen kein Zitat in der gängigen Literatur gefunden werden.

“Präzisierte Heuristik”. Man betrachte den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u \; ,$$

wobei im Folgenden die Existenz aller auftretenden uneigentlichen Integrale angenommen sei. Es sei nun $\varepsilon > 0$ fixiert. Für $K > 0$ hinreichend groß gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{K} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u + \psi_1(K) \; . \end{aligned}$$

Hier ist $\psi_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\psi_1(K) \to 0$, falls $K \to \infty$.

Zu $l \in \mathbb{N}$ wird im nächsten Schritt das Intervall $[-K, K]$ äquidistant mit der Schrittweite $1/l$ zerlegt. Ist l hinreichend groß, so kann das

Integral über u mit einer Riemannschen Summe approximiert werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t\frac{1}{l} + \psi_2(l) + \psi_1(K) \\
&= \sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{2\pi l}\int_{-l\pi}^{l\pi} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{2\pi l}\int_{l\pi}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\infty}^{-l\pi} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t + \psi_2(l) + \psi_1(K)\,.
\end{aligned}$$

Wie ψ_1 ist auch $\psi_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\psi_2(l) \to 0$, falls $l \to \infty$.

Fällt $f(x)$ hinreichend schnell gegen Null, gilt also beispielsweise für ein $\alpha > 0$

$$\int_{l\pi}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le l^{-\alpha} \quad \text{und} \quad \int_{-l\pi}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le l^{-\alpha}$$

für l hinreichend groß , so folgt

$$\left|\sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{2\pi l}\int_{l\pi}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t\right| \le 2Kl\frac{1}{2\pi l}l^{-\alpha} \le \frac{K}{\pi}l^{-\alpha}\,.$$

Eine analoge Abschätzung gilt für das Integral von $-\infty$ bis $-l\pi$. Insgesamt ist bisher gezeigt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \qquad (*)\\
&= \sum_{k=-Kl}^{Kl} e^{i\frac{k}{l}x}\frac{1}{2\pi l}\int_{-l\pi}^{l\pi} f(t)e^{-i\frac{k}{l}t}\,\mathrm{d}t + \psi_1(K) + \psi_2(l) + \psi_3(K,l)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Funktion $\psi_3\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ abgeschätzt ist durch

$$|\psi_3(K,l)| \le \frac{2K}{\pi} l^{-\alpha} \ .$$

Bisher wurde mit der Funktion f selbst gerechnet. Jetzt wird beobachtet: In der Summe über k auf der rechten Seite von $(*)$ steht das diskrete Spektrum der periodischen Fortsetzung von $f_{|[-l\pi,l\pi]}$ im Frequenzbereich $[-K,K]$.

Wäre diese Summe eine unendliche Summe, so wäre diese für $|x| < l\pi$ nach Satz 26.2.1 gleich $f_{|[l\pi,l\pi]}(x) = f(x)$ und es würde folgen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u = f(x) + \psi_1(K) + \psi_2(l) + \psi_3(K,l) \ .$$

Für festes K könnte dann zunächst der Grenzwert $l \to \infty$ betrachtet werden, wobei insbesondere $\psi_3(K,l)$ gegen Null streben würde. Der anschließende Grenzübergang $K \to \infty$ würde liefern

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u \ . \qquad (**)$$

In der Tat gilt die Formel $(**)$ unter geeigneten Voraussetzungen an f. Sie ist das Hauptergebnis dieses Kapitels.

Problem. In $(*)$ steht nur eine endliche Summe. Um für ein festes l mit der Funktion $f_{|[-l\pi,l\pi]}$ argumentieren zu können und für diese wie oben angedeutet Satz 26.2.1 ausnutzen zu können, muss zunächst der Grenzübergang $K \to \infty$ betrachtet werden. Es gilt jedoch

$$\lim_{K\to\infty} |\psi_3(K,l)| \le \lim_{K\to\infty} \frac{2K}{\pi} l^{-\alpha} = \infty \ !$$

Dementsprechend beinhaltet die oben angedeutete Schlussweise eine unzulässige Vertauschung von Grenzwerten, die ohne wesentliche Zusatzinformationen nicht zum Ziel führen kann. Es sei angemerkt, dass die unzulässige Vertauschung von Grenzwerten eine der häufigsten Fehlerquellen in der Analysis ist.

Zur Präzisierung wird nun $(*)$ zunächst geschrieben als:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{l}x} \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-i\frac{k}{l}t}\, \mathrm{d}t}_{=f(x)} \\
&\quad - \sum_{k=-\infty}^{-Kl} e^{i\frac{k}{l}x} \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-i\frac{k}{l}t}\, \mathrm{d}t \\
&\quad - \sum_{k=Kl}^{\infty} e^{i\frac{k}{l}x} \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(t) e^{-i\frac{k}{l}t}\, \mathrm{d}t \\
&\quad + \psi_1(K) + \psi_2(l) + \psi_3(K,l)\,. \qquad (***)
\end{aligned}$$

Bemerkungen.

i) Die obigen Reihen existieren nach Satz 26.2.1 als Fourier-Reihen von $f_{|[-l\pi,l\pi]}$.

ii) Für $|x| < l\pi$ ist der erste Ausdruck auf der rechten Seite von $(***)$ nach Satz 26.2.1 gleich $f_{|[-l\pi,l\pi]} = f(x)$.

In der Formel $(***)$ setzt man

$$\psi_4(K,l) := -\sum_{k=-\infty}^{-Kl} \cdots - \sum_{k=Kl}^{\infty} \cdots\,.$$

Dabei ist anzumerken, dass der Parameter l sowohl in den Summationsgrenzen als auch in den Summanden auftaucht. Dementsprechend ist das Verhalten der Funktion $\psi_4(K,l)$ a priori völlig ungewiss.

Behauptung. Es existiert eine reelle Konstante $c > 0$, sodass für alle $K > 0$ und für alle l hinreichend groß gilt

$$|\psi_4(K,l)| \le \frac{c}{K}\,.$$

Konsequenz. Ist die Behauptung gezeigt, so folgt aus $(* * *)$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u - f(x) \right|$$

$$\leq \; |\psi_1(K)| + |\psi_2(l)| + |\psi_3(K, l)| + \frac{c}{K} \, .$$

Ist K zunächst fixiert und $l \gg K$ hinreichend groß, so gilt (mit dem fixierten $\varepsilon > 0$)

$$|\psi_2(l)| + |\psi_3(K, l)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Ist anschließend K hinreichend groß gewählt mit

$$|\psi_1(K)| + \frac{c}{K} \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

so folgt

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u - f(x) \right| \leq \varepsilon \, .$$

Dies gilt (falls die Behauptung richtig ist) für alle beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ und es folgt $(**)$. $\square$

Beweisidee der Behauptung. Es soll exemplarisch ein Ein- und Ausschaltvorgang betrachtet werden, d.h. es sei im Folgenden

$$f(x) = \begin{cases} 1 \, , & \text{falls} \quad -\pi \leq x \leq \pi \, , \\ 0 \, , & \text{falls} \quad |x| > \pi \, . \end{cases}$$

Bemerkung. Die Vorstellung ist, dass f approximativ als abzählbare Vereinigung solcher Funktion geschrieben werden kann, wie es in Abbildung 27.6 angedeutet ist. Für ein solches f modifiziere man die folgenden Argumente unter Berücksichtigung der Tatsache, dass f für große x hinreichend schnell abklingt. Wegen der Fülle der Details wird dies nicht ausgeführt.

Es sei an Abbildung 27.4 erinnert, in der die periodische Fortsetzung von $f_{|[-l\pi, l\pi]}$ angedeutet ist. Es handelt sich um eine gerade Funktion,

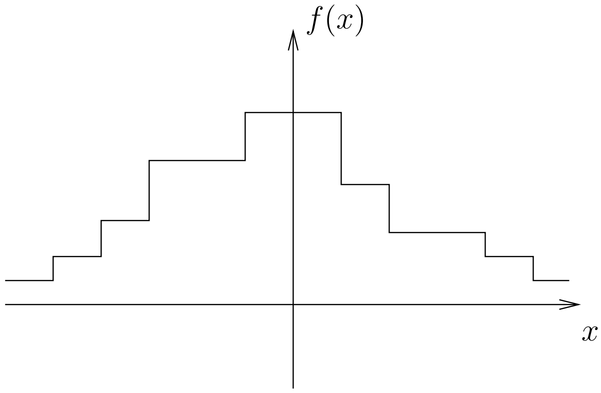

Abbildung 27.6: Eine Treppenfunktion f.

d.h. die Fourier-Entwicklung in $(***)$ ist lediglich eine Entwicklung in Termen des Kosinus:

$$\int_{-l\pi}^{l\pi} f(t)\cos\left[\frac{k}{l}t\right]\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left[\frac{k}{l}t\right]\,\mathrm{d}t = \frac{2l}{k}\sin\left[\frac{k}{l}\pi\right].$$

Betrachtet man schließlich zur Vereinfachung den Punkt $x = 0$, so ist (bis auf Konstanten) die Reihe

$$\sum_{k=Kl}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left[\frac{k}{l}\pi\right]$$

zu analysieren.

Bemerkung. Betragsmäßig kann diese Reihe lediglich durch die divergente harmonische Reihe abgeschätzt werden. Auch gelten beispielsweise nicht die Voraussetzungen des Riemannschen Integralkriteriums (vgl. Proposition 6, p. 326, [Hi1]). Die letzte Hoffnung auf Konvergenz wird durch das alternierende Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen genährt (man vergleiche das Konvergenzkriterium von Leibniz, Satz 4.2.4). Dies verdeutlicht nochmals die Subtilität der Konvergenzfrage.

Wegen

$$\sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] = -\sin\left[\frac{k-l}{l}\pi\right],$$

wird wie folgt aufgespalten:

$$\sum_{k=Kl}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] = \sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] - \sum_{k=Kl+l}^{Kl+2l} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k-l}{l}\pi\right] + \cdots - \cdots + \cdots - \cdots \; .$$

Bemerkung. Streng genommen müssen hier die Partialsummen bis zu einem festen $N \in \mathbb{N}$ betrachtet werden. Da die Konvergenz der Reihe bereits verifiziert wurde, wird auch auf dieses Detail verzichtet.

O.E. sei weiter K gerade, d.h. alle vorkommenden Sinusauswertungen sind nicht-negativ. Die Summe von Kl bis $Kl + l$ ist nach oben abgeschätzt durch

$$\frac{1}{K} \sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] .$$

Die Summe von $Kl + l$ bis $Kl + 2l$ ist nach unten abgeschätzt durch (die negative Summe also nach oben durch das Negative von)

$$\frac{1}{K+2} \sum_{k=Kl+l}^{Kl+2l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k-l}{l}\pi\right] = \frac{1}{K+2} \sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] .$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=Kl}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] &\le \sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] \\ &\quad \cdot \Big[\frac{1}{K} - \frac{1}{K+2} + \frac{1}{K+2} - \frac{1}{K+4} + \frac{1}{K+4} \\ &\quad - \cdots + \cdots - \cdots \Big] \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt beachtet man schließlich, dass (es handelt sich wieder um eine Riemannsche Zwischensumme)

$$\sum_{k=Kl}^{Kl+l} \frac{1}{l} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] \approx \int_{K\pi}^{(K+1)\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = 2 \, .$$

Dementsprechend ist für l hinreichend groß gezeigt (das positive Vorzeichen folgt aus analogen Argumenten)

$$0 \le \sum_{k=Kl}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k}{l}\pi\right] \le \frac{3}{K} \, .$$

Dies ist wiederum genau die Behauptung. □

27.2 Fouriers Integralsatz (absolut integrierbar; Fourier-Integral; Diracsche Deltafunktion; weißes Rauschen)

Bevor der Kernsatz dieses Kapitels präzisiert werden kann, müssen die geeigneten Funktionenklassen eingeführt werde. Es sei zunächst an die Definition 26.2.1, *iii*), einer auf dem Intervall $[a, b]$ stückweise glatten Funktion f erinnert. Ist f nun auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so heißt f stückweise glatt, falls die Einschränkung $f_{|I}$ von f auf jedes abgeschlossene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stückweise glatt ist.

Definition 27.2.1

i) Man sagt, eine stückweise glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von der Klasse $\mathcal{D}$, falls gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty \, .$$

Die Funktion heißt dann auch absolut integrierbar.

ii) Die Funktion ist von der Klasse $\mathcal{D}^*$, falls zusätzlich gilt

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[f(x^+) + f(x^-)\Big] \qquad \textit{für alle } \ x \in \mathbb{R} \, .$$

Bemerkung. Die Definition der Funktionenklasse $\mathcal{D}^*$ ist natürlich motiviert durch Satz 26.2.1.

Beispiele.

i) Die Funktion $f(x) = e^{-|x|}$ ist absolut integrierbar.

ii) Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist zwar beliebig glatt, liegt aber nicht in der Funktionenklasse $\mathcal{D}$, da sie nicht absolut integrierbar ist.

iii) Die in Abbildung 27.7 dargestellte Funktion liegt in der Klasse $\mathcal{D}$, aber nicht in der Klasse $\mathcal{D}^*$.

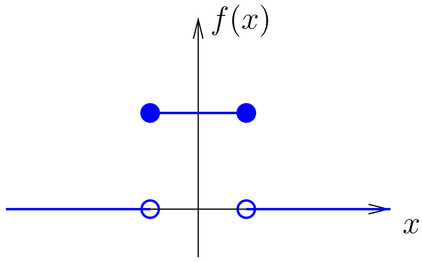

Abbildung 27.7: $f \in \mathcal{D}$, $f \notin \mathcal{D}^*$.

iv) Die in Abbildung 27.8 dargestellte Funktion liegt sowohl in der Klasse $\mathcal{D}$ als auch in der Klasse $\mathcal{D}^*$.

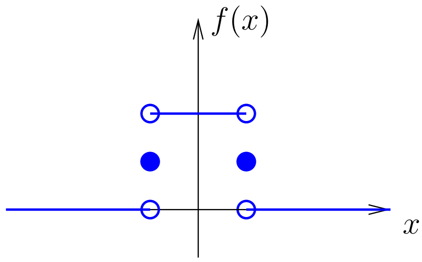

Abbildung 27.8: $f \in \mathcal{D}$, $f \in \mathcal{D}^*$.

Bemerkung. Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t$, so konvergiert auch das Fourier-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\, \mathrm{d}t$$

für jedes $u \in \mathbb{R}$ absolut. Damit kann sinnvoll definiert werden:

Definition 27.2.2

Es sei $f \in \mathcal{D}$. Dann wird der Funktion f mittels

$$\hat{f}(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, \mathrm{d}t \qquad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}$$

eine Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zugeordnet. Die Funktion $\hat{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f. Die Zuordnung $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f} = \mathcal{F}[f]$ heißt Fourier-Transformation.

Bemerkung. Die Wahl des Vorfaktors $1/\sqrt{2\pi}$ ist lediglich als Normierung gewählt und variiert in der Literatur.

Nun kann Fouriers Integralsatz präzise formuliert werden, der im einführenden Paragraphen dieses Kapitels bereits ausführlich plausibel gemacht wurde.

Satz 27.2.1

Es sei $f \in \mathcal{D}^*$ und $\hat{f}$ bezeichne die Fourier-Transformierte von f. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \hat{f}(u)\, \mathrm{d}u\ ,$$

wobei das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \dots$ als Cauchyscher Hauptwert $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \dots$ zu verstehen ist (vgl. Übungen zu Kapitel 12.4). Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(u)|\, \mathrm{d}u$ konvergiert, so ist das uneigentliche Integral im üblichen Sinne zu interpretieren.

Bemerkungen.

i) Wie in der Einleitung bereits hervorgehoben, besagt Satz 27.2.1, dass eine Funktion $f \in \mathcal{D}^*$ aus ihrer kontinuierlichen Spektralzerlegung rekonstruiert werden kann, die Fourier-Transformation ist invertierbar.

ii) Es kann äquivalent geschrieben werden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iu(x-t)} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u \; .$$

iii) Es gilt ein Eindeutigkeitssatz, d.h. aus $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2$ folgt $f_1 = f_2$

Beispiele.

i) Es sei $f(x) = e^{-x^2/2}$. Man setzt

$$\varphi(u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \hat{f}(u)$$

und erinnert sich an die Diskussion parameterabhängiger Integrale, insbesondere an Satz 12.5.1. Es folgt

$$\varphi'(u) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \, \mathrm{d}t \; .$$

Eine partielle Integration liefert für jedes fixierte $R > 0$

$$\int_{-R}^{R} t e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \, \mathrm{d}t = -e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \Big|_{-R}^{R} - iu \int_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \, \mathrm{d}t \; ,$$

und im Limes $R \to \infty$ folgt die lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi'(u) = -i \left[-iu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-iut} \, \mathrm{d}t \right] = -u\varphi(u)$$

zusammen mit der Anfangsbedingung (vgl. die Diskussion der Fresnelschen Integrale in Kapitel 23.1)

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \; .$$

Dieses Anfangswertproblem hat nach Satz 14.1.1 aber genau eine Lösung, und es ist leicht nachzurechnen, dass die Lösung lautet:

$$\varphi(u) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \; ,$$

dementsprechend ist nach der Definition von φ die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = f(u) \; ,$$

es ist f ein Fixpunkt der Fourier-Transformation.

ii) Die anschauliche Vorstellung ist, dass beispielsweise dem Kosinus eine diskrete Frequenz zugeordnet wird (Aber Vorsicht: Der Kosinus kann nicht nach Satz 27.2.1 transformiert werden, warum? Man vergleiche auch die abschließende bemerkung dieses Kapitels.), die Funktion $e^{-x^2/2}$ wird nach dem vorherigen Beispiel auf sich selbst transformiert und die extreme Situation "in die andere Richtung" ist ein "scharfes Signal", dem, wie nun gezeigt wird, eine Fourier-Transformierte mit konstanter Amplitude zugeordnet wird, man spricht von weißem Rauschen.

Ein "scharfes Signal" wird repräsentiert duch die Diracsche Deltafunktion

$$\delta(x) \ := \ \begin{cases} \infty\ , & \text{falls} \quad x = 0\ , \\ 0\ , & \text{falls} \quad x \neq 0\ , \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t \ = \ 1\ .$$

Diese Schreibweise ist in der physikalischen Literatur üblich, natürlich handelt es sich hier nicht um eine Funktion, man spricht von einer Distribution. Ohne auf weitere Details einzugehen wird hier für $0 < \varepsilon \ll 1$ die Approximation

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + t^2)}$$

betrachtet, wobei zu beachten ist, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\Big|_{-R}^{R} = 1\ .$$

Die Behauptung ist nun, dass die Fourier-Transformierte lautet:

$$\hat{\delta}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon e^{-iut}}{\pi(\varepsilon^2 + t^2)}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{-\varepsilon|u|}}{\sqrt{2\pi}}\ . \tag{$*$}$$

Nach Satz 27.2.1 ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \hat{\delta}_\varepsilon(u)\ \mathrm{d}u\ ,$$

es ist also zu verifizieren (die Fourier-Transformierte ist eindeutig)

$$\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\varepsilon|u|}\ \mathrm{d}u\ . \tag{$**$}$$

Dazu wird das Integral als ein Integral über die positive reelle Achse geschrieben, nach der Definition des Betrags ist (Transformation von $\int_{-\infty}^{0} \dots$ auf $\int_{0}^{\infty} \dots$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\varepsilon |u|} \, \mathrm{d}u &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon u} \left[e^{-iux} + e^{iux} \right] \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left[e^{-u(\varepsilon + ix)} + e^{-u(\varepsilon - ix)} \right] \mathrm{d}u \end{aligned}$$

und die Definition des unbestimmten Integrals liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\varepsilon |u|} \, \mathrm{d}u &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-u(\varepsilon+ix)}}{-(\varepsilon+ix)} + \frac{e^{-u(\varepsilon-ix)}}{-(\varepsilon-ix)} \right]_{u=0}^{u=R} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon + ix} + \frac{1}{\varepsilon - ix} \right] = \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + x^2)} \, , \end{aligned}$$

es folgt $(**)$ und damit $(*)$. Anhand von $(*)$ sieht man schließlich, dass im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ eine konstante Amplitude entsteht:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\delta}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{für alle } \ u \in \mathbb{R} \, .$$

Es kann als Faustregel festgehalten werden: Einem scharf lokalisierten Signal entspricht ein breites Frequenzspektrum, im obigen Extremfall ein weißes Rauschen.

iii) Formal kann geschrieben werden

$$F[\cos(\omega x)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(x - \omega) + \delta(x + \omega)) \, .$$

iv) Für weitere Beispiele sei auf die Übungen verwiesen.