UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Klausur zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure

Sommersemester 2014

7.8.2014

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen, beachten Sie folgenden Hinweise:

- Es sind maximal 54 Punkte für Teil A und 108 Punkte für Teil A+B zu erreichen. Mit 18 bzw. 36 Punkten ist die Klausur bestanden.

Punkte A	Punkte A+B	Note
0 - 17.5	0 - 35.5	n. b.
18 - 19.5	36 - 39.5	4.0
20 - 21.5	40 - 43.5	3.7
22 - 23.5	44 - 47.5	3.3
24 - 25.5	48 - 51.5	3.0
26 - 27.5	52 - 55.5	2.7
28 - 29.5	56 - 59.5	2.3
30 - 31.5	60 - 63.5	2.0
32 - 33.5	64 - 67.5	1.7
34 - 35.5	68 - 71.5	1.3
36 - 54	72 - 108	1.0

- Halten Sie Ihren Personal- oder Studentenausweis zur Kontrolle bereit.
- Verwenden Sie ausschließlich das gestempelte Papier. Es wird auch Schmierpapier bereitgestellt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Bogen.
- Verwenden Sie zum Schreiben nur einen blauen oder schwarzen Stift, keinen Bleistift! Bei Nichtbeachtung werden die betroffenen Aufgaben nicht bewertet.
- Führen Sie immer alle Berechnungen exakt durch.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg klar und vollständig dar. Begründen Sie alle Beweisschritte.
- Kreuzen Sie auf dem Deckblatt alle bearbeiteten Aufgaben an. Heften Sie am Schluss Ihre Klausur, Ihre Schmierblätter und das Deckblatt mit der Büroklammer zusammen.
- Einziges zulässiges Hilfsmittel ist ein für Teil A einseitig und für Teil A+B beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt, keine Taschenrechner. Schalten Sie auch Ihr Handy aus.
- Voraussichtliche Bekanntgabe der Ergebnisse im Laufe des 8.8. auf der Website.

Teil A

1. Aufgabe: Fixpunktiteration und Newton-Verfahren

11.5 Punkte

Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sin(x) = x.$$

1. Zeigen Sie, dass
   a) sowohl das Newton-Verfahren
   b) als auch die Fixpunktiteration

   für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergieren.
2. Berechnen Sie für $x_0 = \pi$ die ersten beiden Iterationen x_1, x_2 für
   a) das Newton-Verfahren und
   b) die Fixpunktiteration.

2. Aufgabe: Runge-Kutta-Verfahren

10.5 Punkte

Leiten Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2 folgender Gestalt mit Hilfe der Taylor-Entwicklung her.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Aufgabe: Stabilitätsgebiet

19.5 Punkte

Für $\alpha \in [0,1]$ sei das Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h\big(\alpha f(x_n, y_n) + (1-\alpha) f(x_{n+1}, y_{n+1})\big)$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet in Abhängigkeit von α.
2. Für welche α ist das Verfahren A-stabil?

4. Aufgabe: Methode der kleinsten Fehlerquadrate

12.5 Punkte

Folgende Wertetabelle soll durch ein quadratisches Polynom möglichst gut angenähert werden.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	-32	45	-15

Bestimmen Sie die Koeffizienten durch die Lösung der zugehörigen Normalengleichung.

Teil B

5. Aufgabe: Komplexe Differenzierbarkeit

16.5 Punkte

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen die größtmögliche offene Menge, auf der sie komplex differenzierbar sind:

1. $f_1(x+iy) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$,
2. $f_2(x+iy) = \cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y)$,
3. $f_3(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$.

6. Aufgabe: Cauchy-Integralformel

12.5 Punkte

Berechnen sie für alle $r > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ $\displaystyle\int_\gamma f \,\mathrm{d}z$ mit

1. $\gamma = K_r(0)$ und $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)}$,
2. $\gamma = K_r(c)$ und $f(z) = \dfrac{ze^z}{(z-c)^3}$,
3. $\gamma = K_r(c)$ und $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+1)^3(z-1)^2}$.
   Hinweis: Die Partialbruchzerlegung ist

$$f(z) = \frac{\frac{7}{16} - \frac{1}{8}i}{z-i} + \frac{\frac{1}{8} - \frac{9}{32}i}{(z-i)^2} + \frac{-\frac{1}{16} - \frac{1}{8}i}{(z-i)^3} + \frac{\frac{7}{16} + \frac{1}{8}i}{z+i} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{9}{32}i}{(z+i)^2} + \frac{-\frac{1}{16} + \frac{1}{8}i}{(z+i)^3} - \frac{\frac{7}{8}}{z-1} + \frac{\frac{3}{8}}{(z-1)^2}.$$

7. Aufgabe: Residuensatz

19 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(x) + \sin(x)}\,\mathrm{d}x$ mit $z = e^{ix}$.

8. Aufgabe: Fourier-Reihen

6 Punkte

1. Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-x}, x \in [0, T]$ mit T-periodischer Fortsetzung.
2. Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(i\frac{2\pi}{T}kx\right) \quad , \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) \exp\left(-i\frac{2\pi}{T}kx\right) \mathrm{d}x$$

   zu f bzgl. der Periodenlänge T.
3. Geben Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe in x an.
4. Beweisen Sie für $\sinh(T) = \frac{1}{2}(e^T - e^{-T})$ die Identität

$$\frac{1}{\sinh\left(\frac{T}{2}\right)} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{T + i2\pi k},$$

   indem Sie in die Fourier-Reihe von f den Wert $x = \frac{T}{2}$ einsetzen.