**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FR 6.1 Mathematik**
**Dr. Richards Grzibovskis**
**Dipl.-Math. E. Krämer**

Klausur zur Vorlesung

# Mathematik für Naturwissenschaftler 2

## Sommersemester 2014

7.8.2014

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen, beachten Sie folgenden Hinweise:

- Es sind maximal 135 Punkte zu erreichen. Mit 45 Punkten ist die Klausur bestanden.

| Punkte | | | Note |
|---|---|---|---|
| 0 | - | 44.5 | n. b. |
| 45 | - | 49.5 | 4.0 |
| 50 | - | 54.5 | 3.7 |
| 55 | - | 59.5 | 3.3 |
| 60 | - | 64.5 | 3.0 |
| 65 | - | 69.5 | 2.7 |
| 70 | - | 74.5 | 2.3 |
| 75 | - | 79.5 | 2.0 |
| 80 | - | 84.5 | 1.7 |
| 85 | - | 89.5 | 1.3 |
| 90 | - | 135 | 1.0 |

- Halten Sie Ihren Personal- oder Studentenausweis zur Kontrolle bereit.
- Verwenden Sie ausschließlich das gestempelte Papier. Es wird auch Schmierpapier bereitgestellt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Bogen.
- Verwenden Sie zum Schreiben nur einen blauen oder schwarzen Stift, keinen Bleistift! Bei Nichtbeachtung werden die betroffenen Aufgaben nicht bewertet.
- Führen Sie immer alle Berechnungen exakt durch.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg klar und vollständig dar. Begründen Sie alle Beweisschritte.
- Kreuzen Sie auf dem Deckblatt alle bearbeiteten Aufgaben an. Heften Sie am Schluss Ihre Klausur, Ihre Schmierblätter und das Deckblatt mit der Büroklammer zusammen.
- Einziges zulässiges Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt, keine Taschenrechner. Schalten Sie auch Ihr Handy aus.
- Voraussichtliche Bekanntgabe der Ergebnisse im Laufe des 8.8. auf der Website.

## 1. Aufgabe: Lineare Gleichungssysteme

*10.5 Punkte*

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & a & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

abängig vom Parameter $a \in \mathbb{R}$. Für welche $a$ gibt es eine eindeutige Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen?

## 2. Aufgabe: Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

*17.5 Punkte*

Betrachten Sie die Ebene $E$, die durch die Punkte $p_1 = (3, 0, 1)^T$, $p_2 = (4, 1, 2)^T$ und $p_3 = (4, 2, 2)^T$ bestimmt ist, und die Gerade $g$, die durch die Punkte $q_1 = (-1, -3, -1)^T$ und $q_2 = (-2, -3, -2)^T$ verläuft.

1. Zeigen Sie, dass die Gerade parallel zur Ebene ist.
2. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden zur Ebene.
3. Bestimmen Sie die Ebene in Hessescher Normalform.

## 3. Aufgabe: Inverse Matrix

*19 Punkte*

Bestimmen Sie die Determinanten durch Entwicklung nach einer geeigneten Spalte, Anzahlen linear unabhängiger Spalten und gegebenenfalls Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 & -8 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

## 4. Aufgabe: Normalform von quadratischen Formen

*15.5 Punkte*

Betrachten Sie die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 + 3.$$

1. Geben Sie eine symmetrische 2×2-Matrix $A$ sowie $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$ an, sodass
$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c.$$
2. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D$ und eine orthogonale Matrix $S$ mit $\det(S) = 1$, sodass $A = SDS^T$.
3. Substituieren Sie $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ in $q(\mathbf{x})$ und geben Sie die entstehende Gleichung $Q(\mathbf{y}) = 0$ an.
4. Formen Sie $Q(\mathbf{y})$ in der Form
$$Q(\mathbf{y}) = \frac{(y_1 - \alpha_1)^2}{\beta_1^2} + \frac{(y_2 - \alpha_2)^2}{\beta_2^2} - \gamma$$
um. Welchem geometrischen Objekt entspricht $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R} : Q(\mathbf{y}) = 0\}$?

## 5. Aufgabe: Extrema mehrerer Veränderlicher

*23 Punkte*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 - 3xy + xy^3 + 1$.

## 6. Aufgabe: Kurvenintegrale

*10 Punkte*

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x\rangle \quad \text{mit} \quad F = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt $(-1, 0)$ entlang einer Kurve $\gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)^T$.

1. $\gamma$ sei der untere Halbkreis ($t \in [0, \pi]$).
2. $\gamma$ sei der obere Halbkreis ($t \in [0, -\pi]$).
3. Ist $F$ konservativ?

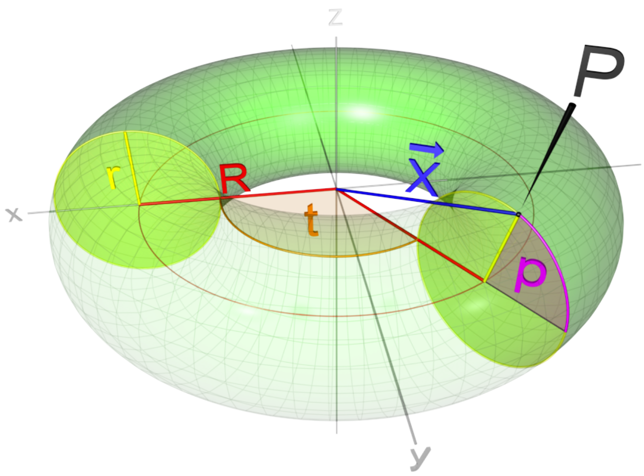
## 7. Aufgabe: Integration mehrerer Veränderlicher

*13.5 Punkte*

Betrachten Sie die Abbildung $X : [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $r, R > 0$,

$$X(\rho, t, p) = \begin{pmatrix} \big(R + \rho\cos(p)\big)\cos(t) \\ \big(R + \rho\cos(p)\big)\sin(t) \\ \rho\sin(p) \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante von $X$.
2. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{Vol}\big(X([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])\big)$ des Rotationstorus mit großem Radius $R$ und kleinem Radius $r$.




## 8. Aufgabe: Differentialgleichungen

*26 Punkte*

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

1. $y' = e^{x-y}$ mit $y(0) = 0$,
2. $2xy + y' + x^2y' = 0$,
3. $x^2y' + xy^2 + xy' - 2y^2 = 0$,
4. $y' + \dfrac{y}{x+1} = e^{-x}$,
5. $y'' + 2y' + y = 0$,
6. $y'' - 3y' + 2y = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 1$.