Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

10. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 06.07.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 10.1. ((2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3) = 15 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x, y)^\top \mapsto x^4 + 2y^2(3 - 2xy),$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x, y)^\top \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

und

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x, y)^\top \mapsto e^{3y} - 3xe^y + x^3.$$

(a) Berechnen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktionen f, g und h.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f, g und h und deren Typ (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

Aufgabe 10.2. (3 Punkte)
Maximiere die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ : \ f(x, y) = xy,$$

wobei x und y die Seitenlängen eines Rechtecks darstellen, mit der Nebenbedingung

$$g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ : \ g(x, y) = 2x + 2y - u = 0,$$

d.h. gesucht ist ein Rechteck maximalen Inhalts bei einem vorgegebenen Umfang $u \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Es soll eine rechteckige Schachtel ohne Deckel mit vorgeschriebenem Volumen V_0 hergestellt werden, wobei die Produktionskosten möglichst gering gehalten werden sollen. Sind x und y die Seitenlängen und z die Höhe dieser Schachtel, so sind ihr Volumen V und ihre Oberfläche S gegeben durch

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{und} \quad S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

Da die Herstellungskosten proportional zur Oberfläche sind, handelt es sich also um die Bestimmung des Minimums der Funktion S unter der Nebenbedingung $V(x, y, z) = V_0$.
Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie aus der Nebenbedingung die Variable z eliminieren, diese dann in S einsetzen und nun $s(x, y) := S(x, y, z(x, y))$ auf Extremstellen untersuchen.