Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

11. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 13.07.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 11.1. (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

(a)
$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$$
über der Schnittgeraden der Ebenen $x + 3y = 30$ und $y + 2z = 20$

(b)
$$f(x, y, z) = x + y + z$$
längs der Ellipse, in der sich die Ebene $x + z = 1$ und der Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ schneiden

mit der Lagrangemethode auf Extrema.

(c) Bestimmen Sie den Punkt auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$, der vom Punkt $(0, 2)$ den geringsten Abstand hat.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $\tilde{\gamma} : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ eine orientierungstreue Umparametrisierung (bzw. Parameterwechsel) von γ, d.h. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ mit einer Parametertransformation $\varphi : [a_0, b_0] \to [a, b]$ und $\varphi' > 0$.
Zeigen Sie:
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz$$
Was passiert bei Umkehrung der Orientierung?
Hinweis: Kettenregel und Substitution.

Aufgabe 11.3. (4 + 4 = 8 Punkte)

Sei $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (u, v, w)^\top \mapsto (vw, -uw, 1 + \alpha u)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

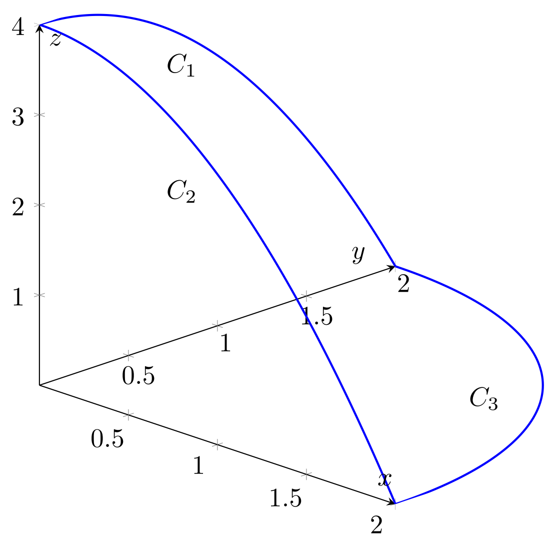
(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f_α.
Für welche α besitzt f_α ein Potential?

(b)
Berechnen Sie das Kurvenintegral von f_α entlang der Kurve C, wobei $C = C_1 + C_2 + C_3$. Die einzelnen Parametrisierungen sind gegeben durch:

$$C_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - t \\ 4 - (2 - t)^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ wird das Kurvenintegral gleich Null?