Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

12. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 20.07.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 12.1. (5 Punkte)

Ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ heißt Potentialfeld, wenn es Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{x})$ ist,
d.h. $\vec{u} = \text{grad}(U) = \nabla U$ gilt.
Das Vektorfeld

$$u(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Potentialfeld.
Bestimmen Sie ein Potenzial $U(x, y, z)$ durch sukzessive Integration nach dx, dy und dz.
Hinweis: $U(x, y, z) = \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + C(y, z)$, wobei $C(y, z)$ die Integrationskonstante in Abhängigkeit von y und z ist.

Aufgabe 12.2. (3 + (3 + 3 + 3) = 12 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \sqrt{8x^2 + 3y^2}\, dl,$$

wobei C der Geradenabschnitt von $(0, 0)$ nach $(1, 2)$ ist und $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

(b) Gegeben seien die Punkte $A(4, 2)$, $B(2, 0)$ und $O(0, 0)$, sowie die geradlinigen Wege C_1 von O nach A und C_2 von O über B nach A.

i) Bestimmen Sie die Parametrisierung der Kurven C_1 und C_2.

Berechnen Sie für die Kraftfelder

ii) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -y \end{pmatrix}$

iii) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 auf diesen Wegen von O nach A zu bewegen. Welches der Felder ist konservativ?

Aufgabe 12.3. (2 + 2 = 4 Punkte)

Berechnen Sie die Bogenlängen folgender Kurven

(a) $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$, wobei $0 \leq t \leq 3$

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix}$, wobei $0 \leq t \leq 2$