Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

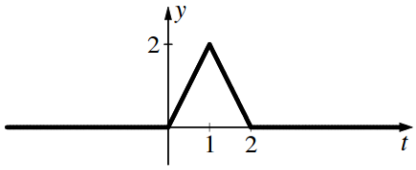
2. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 11.05.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 2.1. (3 Punkte)

Gegeben sei die hier dargestellte abschnittsweise definierte Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \le t < 1 \\ 4 - 2t & 1 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t \end{cases}.$$



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von f:

$$g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Aufgabe 2.2. ($6 \cdot 1{,}5 = 9$ Punkte)

Berechnen Sie die Laplacetransformationen

$$g(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \;\; s > 0$$

folgender Funktionen mit Hilfe der in den jeweiligen Aufgabenteilen angegebenen Eigenschaften der Laplacetransformation.

(a) $f(t) = \sin(at), \; a > 0$
mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} g\left(\frac{s}{a}\right).$$

(b) $f(t) = e^{3t}\sin(t)$
mit Hilfe des Dämpfungssatzes:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = g(s + a).$$

(c) $f(t) = t^2 \sin(t)$
mit Hilfe des Multiplikationssatzes:

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = g^{(n)}(s).$$

(d) $f(t) = \cos(t) = \frac{d}{dt}\sin(t)$
mit Hilfe des Differentiationssatzes:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot g(s) - f(0).$$

(e) $f(t) = \int_0^t e^{3\tau}\sin(\tau)d\tau$
mit Hilfe des Integrationssatzes:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}g(s).$$

(f) $f(t) = \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau) d\tau$
mit Hilfe des Faltungssatzes:

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) * f_2(t-\tau) d\tau\right] = g_1(s) \cdot g_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)].$$

Aufgabe 2.3. (5 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} - x = -3e^{4t}, \; x(0) = -1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Zur Notation:
$x(t) \leftrightarrow X(s)$, d.h. $X(s)$ ist die Laplace-Transformierte von $x(t)$.
Anleitung:

- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der linken Seite $\mathcal{L}[\dot{x} - x]$. Verwenden Sie dazu den Differentiationssatz aus Aufgabe 2.
- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der rechten Seite $\mathcal{L}[-3e^{4t}]$.
- Setzen Sie die beiden Laplace-Transformierten gleich und lösen Sie nach X auf.
- Bestimmen Sie die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}[X]$. Dies ist in diesem Fall leicht zu erkennen und kann ohne große Berechnung angegeben werden. Sie erhalten dadurch die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems.