Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

4. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Freitag, den 26.05.2017 bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 4.1. ((2 + 2 + 2) + 3 = 9 Punkte)

i) Gegeben seien Polynome $p:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 der Form:

$$p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

mit den Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, wobei die Koeffizienten nicht alle gleichzeitig Null sind (trivialer Fall).
Bestimmen Sie die Koeffizienten so, dass die Polynome für alle $(x,y) \in \mathbb{R}$ die jeweiligen angegebenen Bedingungen erfüllen, d.h. geben Sie an welche Koeffizienten z.B. gleich Null und welche Koeffizienten z.B. Vielfache anderer Koeffizienten sein müssen.

(a) $\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0$

(b) $\frac{\partial p^2}{(\partial x)^2}(x,y) = 0$ und $\frac{\partial p^2}{(\partial y)^2}(x,y) = 0$

(c) $\frac{\partial p^2}{(\partial x)^2}(x,y) + \frac{\partial p^2}{(\partial y)^2}(x,y) = 1$ und $\frac{\partial p^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$

ii) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der reellen Funktion

$$h : (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

und berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Aufgabe 4.2. (3 + 3 = 6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der linearen Approximation

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(h)$$

Nährungswerte für

(a) $2.05^{1.9}$

(b) $\sqrt{1.1^2 + 1.9^2 + 2.05^2}$

Aufgabe 4.3. (3 + 3 = 6 Punkte)
Definition:
Eine stetige Funktion $f:\ D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, die überall auf D außer an der Stelle x_0 definiert ist, hat in x_0 eine *Definitionslücke*. Eine Definitionslücke, in deren Nähe die Funktionswerte der Funktion gegen unendlich laufen, wird als *Polstelle* bezeichnet.
Sei x_0 eine Definitionslücke der stetigen Funktion $f:\ D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Existiert eine stetige Funktion $\tilde{f}:\ D \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$, dann ist $\tilde{f}$ eine stetige Fortsetzung von f. Die Definitionslücke wird dann *stetig hebbar* oder *stetig behebbar* und die Funktion f *stetig ergänzbar* oder *stetig fortsetzbar* genannt.
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) =: r,$$

dann ist x_0 eine stetig hebbare Definitionslücke von f. In diesem Fall wird durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \setminus \{x_0\} \\ r, & x = x_0 \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ohne Definitionslücke definiert.

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an und untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern von D, inklusive $-\infty$ und $+\infty$.
An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen stetig fortsetzen bzw. an welchen Stellen liegt zB. eine Polstelle vor?

(a) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

Hinweis: Untersuchen Sie die Definitionslücken mit Hilfe der Folgenstetigkeit und Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Form $x_n = \pm\sqrt{1 \pm \frac{2}{n\pi}}$.

(b) $f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}$

Hinweis: Faktorisieren Sie Zähler und Nenner. Untersuchen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ bzw. für alle Definitionslücken jeweils den rechtsseitigen $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$ und den linksseitigen $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ Grenzwert von f an die Stelle x_0.