Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

5. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 01.06.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung einer Welle im Raum.
Gegeben sei außerdem die allgemeine Lösung der Gleichung

$$p(x_1, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct),$$

wobei f und g beliebige zweimal differenzierbare Funktionen und $c > 0$ ein Parameter (z.B. kann c die Geschwindigkeit sein) sind. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den eindimensionalen Fall und nehmen an, dass sich die Welle in x_1-Richtung ausbreitet.

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung $p(x_1, t)$ die oben angegebene Gleichung erfüllt.
Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung die beiden Hilfsgrößen

$$\xi = \xi(x_1, t) = x_1 - ct \text{ und } \eta = \eta(x_1, t) = x_1 + ct.$$

Es kann damit $f(x_1 - ct) = f(\xi)$ und $g(x_1 + ct) = g(\eta)$ geschrieben werden.

Aufgabe 5.2. (8 Punkte)

Leiten Sie die Darstellung des Laplace-Operators

$$\Delta_{x,y,z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in Kugelkoordinaten her, d.h.

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

unter Verwendung der Transformationen

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi \\ z &= r\cdot\cos\vartheta \end{aligned}$$

bzw. deren Umkehrung

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ der Radius, $\vartheta \in [0, \pi]$ der Polarwinkel und $\varphi \in [-\pi, \pi]$ der Azimutwinkel ist.

Aufgabe 5.3. (1 + 3 + 1 = 5 Punkte)
Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A' := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und die Basis

$$B : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \text{ von } \mathbb{C}^2$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge von $\left\{ S := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid AS = SA' \right\}$.

Hinweis: Bringen Sie das Gleichungssystem auf die Form $C\vec{x} = 0$ mit $\vec{x} = (a, b, c, d)^\top$ (die (Koeffizienten)-Matrix C steht stellvertretend für die Matrix, die sich durch die Umformungen ergibt) und bringen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf Zeilenstufenform. Bestimmen Sie mit Hilfe des Rangs der Matrix C die Anzahl der Elemente in der Basis. Suchen Sie entsprechend viele Vektoren x, die zum einen das Gleichungssystem lösen und zum anderen linear unabhängig voneinander sind.

(c) Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \; x \mapsto Ax$. Gilt $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$?