Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

6. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

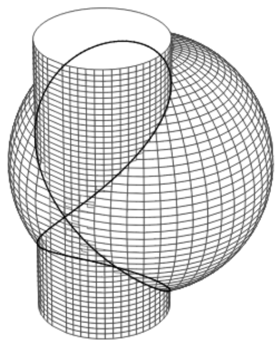
Abgabe: Donnerstag, den 08.06.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 6.1. (1.5 + 1 + 2.5 = 5 Punkte)

Gegeben sei die Kurve mit der Parametrisierung

$f(t) = (\sin(t)\cdot\cos(t),\ \sin^2(t),\ \cos(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Sie ist der Schnitt der Einheitskugel, d.h. auf einer Kugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 1, mit einem um den Wert $\frac{1}{2}$ verschobenen Zylinder vom Radius $\frac{1}{2}$. Die Kurve verläuft vom Nordpol zum Südpol und wieder zum Nordpol.



(a) Überprüfen Sie rechnerisch, dass die oben angegebene Parametrisierung eine Kurve auf der Einheitskugel beschreibt.

(b) Zeigen Sie außerdem, dass die Kurve auch auf einem Zylinder gegeben durch die Form $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ liegt.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor der Kurve.

Aufgabe 6.2. (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2,3}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils den Gradienten $\operatorname{grad} f(x_0)$ und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ von f in x_0 in Richtung v.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x_0 = (3, 4), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\top$

(b) $f(x, y, z) = \cos\left(y^2\right) + ze^{xy}, \quad x_0 = (0, 0, \pi), \quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^\top$

(c) $f(x, y, z) = \ln\left(xyze^x\right), \quad x_0 = (1, 1, 1), \quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^\top$

Aufgabe 6.3. (6 Punkte)

Berechnen Sie den Tangenten- und den Normalenvektor der Kurve

$$x(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), \quad t \in [0, b] \subseteq \mathbb{R}.$$

Geben Sie außerdem die Schmiegebene $s(t)$ an die Kurve für $t = 0$ an.