



7. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure II im Sommersemester 2017

Abgabe: Freitag, den 16.06.2017 bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 7.1. (1 + 3 + 2 = 6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^\top \mapsto x^2 - y^2 - 4z^2$$

und die Ebene $E : x = -2$, sowie die Niveaumenge

$$N = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = -4\}.$$

- Sind die Punkte $(0, 0, 1)$ und $(-2, 2, -1)$ Elemente der Menge N ?
- Berechnen Sie die Tangentialebenen an N in den Punkten aus (a).
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an $E \cap N$ (Schnittmenge von E und N) im Punkt $(-2, 2, -1)$.

Aufgabe 7.2. (1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y)^\top \mapsto x(x^2 + y^2 - 1).$$

- Zeichnen Sie die Niveaumenge in ein Schaubild.

$$N_0 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

- Berechnen Sie $\text{grad}(f)$.
- Berechnen Sie die Tangenten an N_0 in den Punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Fügen Sie diese Tangenten und die Gradienten in diesen Punkten zur Skizze aus (a) hinzu.
- Bestimmen Sie $\text{grad}(f)$ in den Punkten $(0, -1)$ und $(0, 1)$. Machen Sie mit Hilfe dieser Information eine Aussage über die Tangenten an N_0 in diesen Punkten.
- Sei $N_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 6\}$.
Sind $(\sqrt[3]{6}, 1)$, $(\sqrt[3]{6}, -1)$ und $(2, 0)$ Elemente von N_6 ?
Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}$ mit $(\frac{3}{2}, y) \in N_6$.

Aufgabe 7.3. (6 Punkte)

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{2y+z} - 1 \\ \arctan(xz) - y - z \\ x - 2 \cos(2 + yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \ln(5 + v^2 w^2) \\ uw\sqrt{3 + v^2} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $J_f(x, y, z)$, $J_g(u, v, w)$ und $J(g \circ f)(0, -1, 2)$.