Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

8. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 22.06.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 8.1. (2 + (2 + 3 + 3) = 9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $J_f(1,2,3)$ und für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy\sin(\pi z) \\ \sin(\pi xyz) \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die total differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$(i) : \;\; J_g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } (ii) : \;\; J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $h(1,1) = (1,1)^\top$. Berechnen Sie $(iii) : J(g \circ h)(1,1)$.

Aufgabe 8.2. (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)
Sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^2$ und die Jacobi-Matrix $J_f \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben.
Die Determinante der Jacobi-Matrix J_f einer Transformation (z.B. der Wechsel von kartesischen zu polaren Koordinaten) von zwei Funktionen und zwei Veränderlichen mit $f(u,v) = (x,y)$ ist

$$\det(J_f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \overset{\text{altern. Notation}}{=} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Zeigen Sie, dass für die differenzierbaren Funktionen $f(u,v)$, $g(u,v)$ und $h(u,v)$ gilt:

(a) $\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

(b) $\frac{\partial(f+g,h)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(f,h)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}$

(c) $\frac{\partial(fg,h)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(f,h)}{\partial(u,v)} \cdot g + f \cdot \frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}$

Aufgabe 8.3. (4 + 4 = 8 Punkte)
Die sogenannte *Jacobi-Transformation* kann dazu verwendet werden die Integrationsvariablen eines Integrals so zu transformieren, dass sich die Stammfunktion des Integranden leichter berechnen lässt oder sich das Integrationsgebiet in ein "Schöneres" transformieren lässt.
Angenommen wir integrieren $f(x,y)$ über ein Gebiet A. Mit der Transformation $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ integrieren wir dann über das Gebiet A' und das Integral wird zu

$$\int\!\!\int_A f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{dA} = \int\!\!\int_{A'} f(g(u,v), h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv, \tag{1}$$

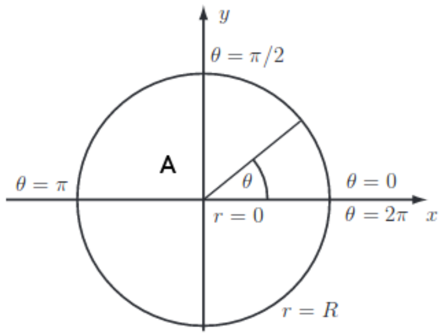
mit $dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$, wobei $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ der Betrag der Jacobi-Determinante ist.

Beispiel 1: Berechnung der Fläche des Kreises mit Radius R.

Sei A das Gebiet, das durch einen Kreis mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung beschränkt ist. Die Fläche des Gebiets berechnet sich durch $\int 1 dA$. Wir wollen diese Fläche durch den Wechsel zu Polarkoordinaten bestimmen und verwenden die uns bekannte Transformation

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

von kartesischen (x, y) in polare Koordinaten (r, θ).



Wir berechnen alle partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos(\theta)$$

Dann ist die Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\theta) \cdot r \cdot \cos(\theta) - (-r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) = r \cdot (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r \end{aligned}$$

Die Grenzen des Radius laufen von $r = 0$ (Zentrum) bis $r = R$ (Rand) und Grenzen des Winkels laufen gegen den Uhrzeigersinn von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$.
Die Fläche A berechnet sich also:

$$\int_A dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R |r| \, dr\, d\theta \overset{r \geq 0}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr\, d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2,$$

was der uns bekannten Formel zur Berechnung der Fläche eines Kreises entspricht.

Beispiel 2: Gegeben ist eine Ellipse der Form $x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$. Mit der Transformation $x = \frac{u}{2}$ und $y = 3v$ und einsetzen in die Formel bekommen wir:

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{(3v)^2}{36} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{u^2}{4} + \frac{9u^2}{36} = 1 \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 = 4,$$

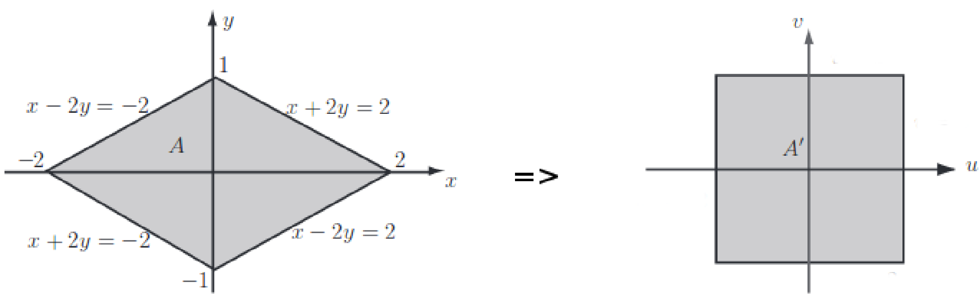
d.h. wir sind von einer Ellipse gestartet und erhalten durch die Transformation einen Kreis mit Radius 2.

Aufgaben:

(a) Das rautenförmige Gebiet A ist beschränkt durch die Geraden $x+2y = 2$, $x-2y = 2$, $x+2y = -2$ und $x - 2y = -2$. Wie möchten das Integral

$$I_1 = \iint_A (3x + 6y)^2 \, dA \tag{2}$$

über diesem Gebiet A auswerten. Da das Gebiet weder horizontal noch vertikal einfach ist, müsste man ohne Koordinatentransformation das Gebiet in zwei einfache dreieckige Gebiete teilen und somit zwei Integrale auswerten. Durch die Koordinatentransformation bekommen wir ein einfaches quadratisches Gebiet A'.



Berechnen Sie das Integral (2) mit Hilfe der Transformation $u(x,y) = x+2y$ und $v(x,y) = x-2y$.
Hinweise:

- Berechnen Sie $x(u,v)$ und $y(u,v)$.
- Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen für u und v.
- Setzen Sie anschließend beides in (1) ein.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$I_2 = \iint_A (x+y)\,dA \tag{3}$$

mit Hilfe der Transformation $x(u,v) = 2u + 3v$ und $y(u,v) = 2u - 3v$ analog zu a). Das rautenförmige Gebiet A sieht nun folgendermaßen aus: