Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

9. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure II
im Sommersemester 2017

Abgabe: Donnerstag, den 29.06.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 9.1. (5 Punkte)

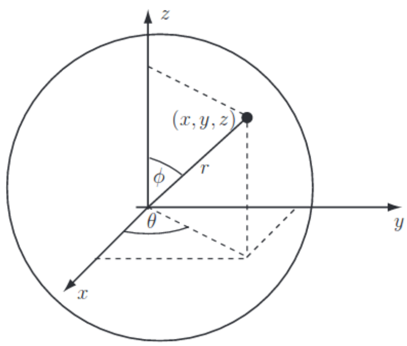
Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Kugel mit Radius R, d.h. $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, analog zu dem Beispiel aus Aufgabe 8.3 mit Hilfe der Jacobi-Transformation her.

Verwenden Sie dazu:

$$V = \int\int\int f(x,y,z)\,dV,$$

wobei $dV = dx\,dy\,dz = |\det(J)|\,dr\,d\theta\,d\phi$,
J die zugehörige Jacobi-Matrix der Transformation und

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta,\phi) = r\cos\theta\sin\phi \\ y &= y(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \\ z &= z(r,\phi) = r\cos\phi. \end{aligned}$$



Aufgabe 9.2. (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Gegeben seien die Vektorfelder

(a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z)^\top \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z)^\top \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z)^\top \mapsto \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie für diese Vektorfelder f_1, f_2, f_3 deren Divergenz und Rotation. Welches dieser Vektorelder ist divergenz- bzw. wirbelfrei? Welche Punkte sind Quellen bzw. Senken?
Ordnen Sie anschließend jedem der Bilder das dazu passende Vektorfeld zu.

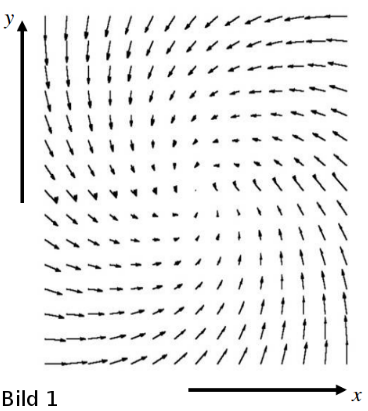


Bild 1

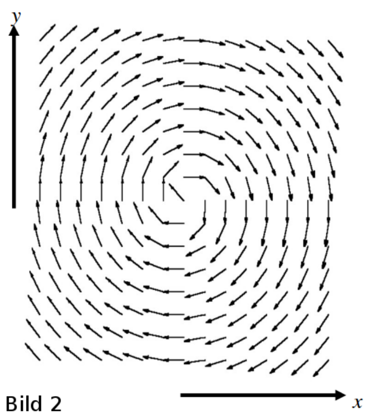


Bild 2

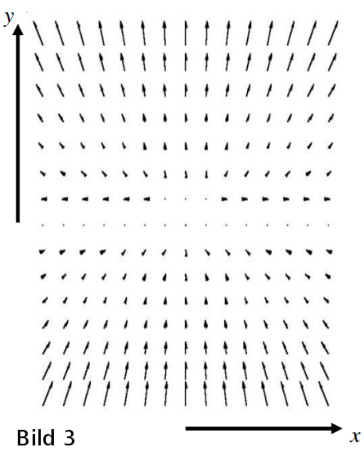


Bild 3

Aufgabe 9.3. (3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y)^\top \mapsto \sin(xy).$$
Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung $T_1(f(x, y), (0, 0))$ und zweiter Ordnung $T_2(f(x, y), (0, 0))$ im Punkt $x_0 = (0, 0)$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(t, t)$, $T_1(f(t, t), (0, 0))$ und $T_2(f(t, t), (0, 0))$ auf dem Intervall $t \in [-2, 2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem (mit Achsenbeschriftung!).

(b) Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ und
$$f : D \to \mathbb{R} : (x, y)^\top \mapsto \frac{x + y}{x - y}.$$
Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung $T_1(f(x, y), (-1, 1))$ und zweiter Ordnung $T_2(f(x, y), (-1, 1))$ im Punkt $x_0 = (-1, 1)$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(-1, t)$, $T_1(f(-1, t), (-1, 1))$ und $T_2(f(-1, t), (-1, 1))$ auf dem Intervall $t \in [0, 2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem (mit Achsenbeschriftung!).