

Vor allem die mathematischen Wissenschaften zeichnen sich aus durch Ordnung, Symmetrie und Beschränkung; und dies sind die größten Formen des Schönen.

Aristoteles
(384-322 v.Chr., Philosoph)



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

0. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure III im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 26.10.2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 0.1. (6 Punkte) Skizzieren Sie die folgenden durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierten ebenen Kurven und entscheiden Sie, welche dieser Kurven regulär sind.

- (a) $r(t) = (\sin \pi t, 0)^\top$, (c) $r(t) = (t^2, t^3 - t)^\top$, (e) $r(t) = (t, |\sin t|)^\top$,
(b) $r(t) = (t, |t|)^\top$, (d) $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)^\top$, (f) $r(t) = (|\sin t|, t)^\top$.

Aufgabe 0.2. (5 Punkte) Skizzieren Sie die Kurve

$$r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$$

und berechnen Sie die Länge dieser Kurve zwischen den Punkten $(0, 0)^\top$ und $(2\pi, 0)^\top$.

Aufgabe 0.3. (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto \left(\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}s \right)^\top$$

gegebene Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(b) Berechnen Sie für alle $s \in (0, 1)$ das begleitende Dreibein, sowie die Krümmungs- und Windungszahl von γ .

Aufgabe 0.4. (5 Punkte)

(a) Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Länge der Kurve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))^\top$$

durch

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie den Umfang der durch

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 15, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

implizit gegebenen Kurve.

(c) Eine Skateboardbahn habe einen parabelförmigen Querschnitt mit einer maximalen Breite von 24 Metern und Tiefe von 12 Metern. Welche Strecke legt ein Skateboarder beim einmaligen Durchqueren der Bahn zurück, vorausgesetzt er nimmt den kürzesten Weg?

(d) Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : (1, 17) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(2t^3 + \frac{1}{24t}, t \right)$$