In der Mathematik gibt es keine Meinungsverschiedenheiten; selbst Wahnsinnige, wenn sie überhaupt noch verstehen, wovon die Rede ist, sehen die mathematischen Wahrheiten ein.
Arthur Schopenhauer
(1799-1860, deutscher Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

11. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

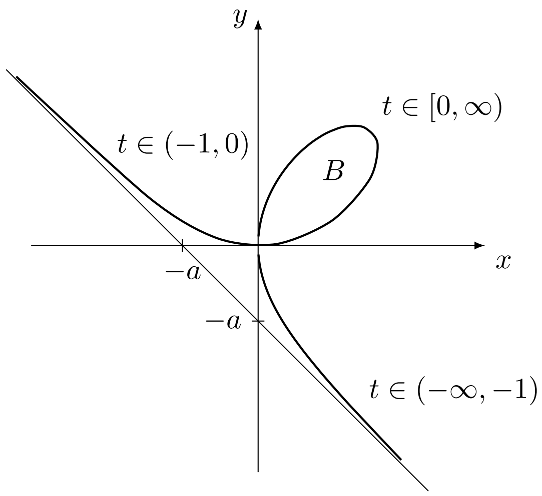
Abgabe: Donnerstag, den 18. 1. 2018 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 11.1. (6 Punkte) Berechnen Sie die Masse der Ellipse $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ mit der Flächendichte

$$\rho(x,y) = \rho_1 + \rho_2 \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right).$$

Hierbei sind a, b, ρ_1 und ρ_2 positive Konstanten.
Hinweis: Betrachten Sie die Transformation $(x,y) = (ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi))$.

Aufgabe 11.2. (6 Punkte) Die Punkte der in der Abbildung dargestellten Kurve genügen der Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$. Die Kurve lässt sich durch $x(t) = \frac{3at}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{3at^2}{t^3+1}$, $t \in \mathbb{R}$ parametrisieren. Berechnen Sie den Flächeninhalt der zum Parameterintervall $[0,\infty)$ gehörenden Schleife B.



Aufgabe 11.3. (8 Punkte) Betrachten Sie für $R > 0$ die durch

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

implizit gegebenen Kurve. Diese hat die Parameterdarstellung

$$x(t) = R\cos^3 t,\; y(t) = R\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche *ohne* die Parameterdarstellung zu benutzen.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche aus der Parameterdarstellung, indem Sie den Satz von Green benutzen.

Hinweis: $\int \sin^2(ax)\cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4ax)}{32a}$, $\int \sin^2(ax)\cos^4(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{16} + \frac{\sin(2ax)}{64a} - \frac{\sin(4ax)}{64a} - \frac{\sin(6ax)}{192a}$.