Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.
Lazare Nicolas Marguerite Carnot
(1753-1823, französischer Offizier und Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

12. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 25. 1. 2018 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 12.1. (4 Punkte) Es sei

$$X : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v)^\top \mapsto \left(u, v, \frac{1}{4}uv\right)$$

eine Parameterdarstellung des Flächenstücks S. Berechnen Sie für

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z)^\top \mapsto 4z$$

und

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z)^\top \mapsto (1+z^4, 1+z^4, 1+x^2y^2)^\top$$

die Integrale $\iint\limits_S f \,\mathrm{d}F$ und $\iint\limits_S \langle V, n\rangle \,\mathrm{d}F$.

Aufgabe 12.2. (4 Punkte) Gegeben ist die Parametrisierung X einer Fläche S durch

$$X : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (u,v)^\top \mapsto (u\cos v, u\sin v, \log\cos v + u)^\top.$$

Zeigen Sie, dass für alle $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Kurven $X(u_1, \cdot)$, $X(u_2, \cdot)$ Abschnitte gleicher Länge auf allen Kurven der Form $X(\cdot, v)$, $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bestimmen.

Aufgabe 12.3. (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie für das Ellipsoid $E = \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, \quad a,b,c > 0\right\}$ und das Vektorfeld

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z)^\top \to (xz^2, yx+3, -\frac{1}{2}z^2)$$

das Integral $\iint\limits_{\partial E} \langle V, n\rangle \,\mathrm{d}F$.

(b) Betrachten Sie die Fläche $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{4}xy,\ x^2+y^2 \le 4\right\}$. Berechnen Sie mit

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z)^\top \mapsto (z, -z, y)$$

das Integral $\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} V, n\rangle \,\mathrm{d}F$. Hierbei soll der Normalenvektor in positive $z-$Richtung zeigen.

Aufgabe 12.4. (4 Punkte) Für $R > 0$ sind die Mengen

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \le R^2\},$$
$$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le R^2\}$$

gegeben. Berechnen Sie das Volumen von $C_1 \cap C_2$.