Unterhaltung ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik.
William White

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

2. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 9. 11. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 2.1. (4 Punkte) Welche Eigenwerte besitzen die folgenden Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.2. (3 Punkte) Betrachten Sie die Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}$.

(a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top Ax = 1\} = E$.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $D = U^\top AU$.

(c) Welche geometrische Interpretation hat die Menge $\tilde{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top Dx = 1\}$?

Aufgabe 2.3. (7 Punkte) In einer utopischen Überflussgesellschaft gelte:

- Jedes Kraftfahrzeug ist bis zu einem, zwei oder drei Jahre alt.
- 10% der zweijährigen sowie sämtliche dreijährigen Autos werden zum Jahreswechsel durch neue ersetzt.
- Die Gesamtzahl der Fahrzeuge ändert sich nicht.

Mit $x_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t})$ wird die Altersverteilung der Autos am Ende des Jahres $t \in \mathbb{N}$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $x_{t+1} = Ax_t$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Charakterisieren Sie alle nichttriviale Altersverteilungen, die zeitlich konstant sind.

Aufgabe 2.4. (5 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, ausgehend vom Startwert $(1, 0, 0)^\top$ und nach vier Iterationen,

(a) eine Näherung an den betragsmäßig größten Eigenwert mittels der Potenzmethode,

(b) eine Näherung an den betragsmäßig kleinsten Eigenwert mittels der inversen Potenzmethode.

Bestimmen Sie in beiden Fällen den relativen Fehler.