Alles, was in der Mathematik geschieht, dient einzig und allein der Ehre des menschlichen Geistes.
Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

4. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 23. 11. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 4.1. (10 Punkte) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

(a) $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$

(b) $x(1+x) - \dfrac{y'(x)}{y(x)(1+y(x))} = 0$

(c) $x^2 - 3y(x)^2 + 2xy(x)y'(x) = 0$

(d) $(x^2+1)y'(x) + xy(x) - x(x^2+1) = 0$

(e) $xy'(x) + y(x) = x\sin(x)$

(f) $y'(x) + 2y(x) = 25x^2\exp(3x)$

(g) $y'(x) = x^2 - 2xy(x) + y(x)^2$

(h) $y'(x) = \dfrac{x-2y(x)}{2x-y(x)}$

Aufgabe 4.2. (5 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x), \tag{*}$$

mit stetigen Funktionen $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Sei y_s eine spezielle Lösung von (*). Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

 (i) y ist eine Lösung von (*),

 (ii) y hat die Form $y = y_s + u$, und u genügt der Differentialgleichung

$$u'(x) = (2f(x)y_s(x) + g(x))u(x) + f(x)u(x)^2.$$

(b) Es sei nun $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und v erfülle die Differentialgleichung

$$v'(x) = p(x)v(x)^a + q(x)v(x) \tag{**}$$

mit stetigen Funktionen $p, q : D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Substitution $w = v^{1-a}$ die Gleichung (**) in die lineare Differentialgleichung

$$w'(x) = (1-a)q(x)w(x) + (1-a)p(x)$$

überführt.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)^2 - (2x+1)y(x) + 1 + x + x^2.$$

Aufgabe 4.3. (4 Punkte) Die verbesserte Polygonzugmethode nach Euler für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

mit Schrittweite $h > 0$ kann algorithmisch folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass es sich um ein Einschrittverfahren mit Konsistenzordnung zwei handelt.

Aufgabe 4.4. (10 Punkte) Geben Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems an:

$$my''(t) = \begin{cases} -mg - ry'(t)^2, & y'(t) \geq 0 \\ -mg + ry'(t)^2, & y'(t) < 0 \end{cases}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = v_0,$$

mit Konstanten $m, g, r, v_0 > 0$. Zu welchem Zeitpunkt wird y maximal? Bestimmen Sie die Nullstellen von y.