So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.
Thomas Mach
(1828-1916, böhmischer Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

5. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 30. 11. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 5.1. (5 Punkte) Bestimmen Sie auf $I = (0, \infty)$ die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_1'(t) + \frac{1}{2t} x_1(t) - \frac{1}{2t^2} x_2(t) - t &= 0 \\ x_2'(t) - \frac{1}{2} x_1(t) - \frac{1}{2t} x_2(t) - t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\left\{t \mapsto (1,t)^\top, t \mapsto (\frac{1}{t}, -1)\right\}$ eine Integralbasis des homogenen Systems bildet.

Aufgabe 5.2. (6 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'(t) = \gamma\sqrt{y(t)} - \tau y(t), \quad y(0) = y_0 > 0, \quad \tau, \gamma > 0,$

(b) $y'(x) = e^{-x} y(x)^2 + y(x) - e^x.$

Aufgabe 5.3. (6 Punkte) Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem auf dem Intervall $I = (0, \infty)$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $t \mapsto (t^2, -t)^\top$ und $t \mapsto (-t^2 \log(t), t + t\log(t))^\top$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung sind.

(b) Bestimmen Sie durch Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Aufgabe 5.4. (3 Punkte) Bestimmen Sie für

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & -3t^2 \\ 3t^2 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mittels Liouville-Formel und $X(0) = I_2$ die Wronski-Determinante. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Fundamentallösung

$$X(t) = e^{t^2} \begin{pmatrix} \cos(t^3) & \sin(t^3) \\ -\sin(t^3) & \cos(t^3) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.5. (7 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$$

(a) Zeigen Sie , dass $y(x) = x$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

(c) Geben Sie eine spezielle Lösung des Systems an.

(d) Bestimmen Sie mittels Liouville-Formel die allgemeine Lösung des Systems.

(e) Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung an.

Hinweis: Sollten Sie auf Integrale der Form $\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ stoßen, so lassen Sie diese bitte stehen.