Unermesslich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf.
David Hilbert
(1866-1943, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

6. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 7. 12. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 6.1. (4 Punkte) Transformieren Sie die folgende Matrix auf Jordansche Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.2. (6 Punkte) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

(a) Lösen Sie das System mit Hilfe der Laplace-Transformation.

(b) Lösen Sie das System mit Hilfe eines Fundamentalsystems der homogenen Gleichung und dem Raten einer speziellen Lösung.

Aufgabe 6.3. (6 Punkte) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Geben Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem der homogenen Gleichung an.

(a) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Hat die Matrix des homogenen Systems reelle Einträge, aber komplexe Eigenwerte oder Eigenvektoren, so erhält man ein reelles Fundamentalsystem, indem man die konjugiert komplexen Lösungen durch deren Real- und Imaginärteil einer der beiden Lösungen ersetzt.

Aufgabe 6.4. (3 Punkte) Geben Sie die allgemeinen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y^{(4)}(x) + 4y(x) = 0$,

(b) $y^{(5)}(x) - y^{(4)}(x) - y'(x) + y(x) = x$.

Aufgabe 6.5. (5 Punkte) Eine homogene Kette mit Liniendichte $\sigma > 0$ und der Länge 200 cm wird über einer Stange so gehalten, dass sie auf einer Seite 80 cm, auf der anderen 120 cm herunterhängt. Wird sie losgelassen, so gleitet sie reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft von der Stange. Nach welcher Zeit ist das Kettenende ganz oben?