Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.
David Hilbert
(1866-1943, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

7. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 14. 12. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 7.1. (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y''(x) - y(x) - xe^{2x} = 0$,

(b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) - e^x \cos(x) = 0$.

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation:

(c) $y''(x) - 9y(x) - \sin(x) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$,

(d) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) - xe^{-x} = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < \pi \\ 4\pi, & t \geq \pi \end{cases}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Hinweis: Beschreiben Sie die rechte Seite der Differentialgleichung mit Hilfe der Heaviside-Funktion.

Aufgabe 7.3. (10 Punkte) Bestimmen Sie Lage und Stabilitätsverhalten aller Gleichgewichtslösungen von

(a) $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -x - y, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = -x - 1 + e^{-y} \\ y' = 1 - e^{x+y}, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = x(3 - x - 2y) \\ y' = y(2 - x - y) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = \alpha x(y^2 - 1) + y \\ y' = -x \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe 7.4. (6 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -2x.$$

Bestimmen Sie

(a) das zugehörige Differentialgleichungssystem erster Ordnung,

(b) die Differentialgleichung der Phasenbahn,

(c) die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung und damit das Phasenportrait der Bewegung,

(d) die Phasenbahn für die Anfangswerte $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$,

(e) die Skizze dieser Phasenbahn mit Umlaufsinn,

(f) die zugehörige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.