An Archimedes wird man noch denken, wenn Aischylos längst vergessen ist, denn Sprachen sterben, mathematische Ideen jedoch nicht.
Godfrey Harold Hardy
(1877-1947, britischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

8. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure III

im Wintersemester 2017/18

Abgabe: Donnerstag, den 21. 12. 2017 bis spätestens 8:30 Uhr.

Aufgabe 8.1. (6 Punkte) Untersuchen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Randwertproblems

$$y'' + y = 1$$

unter den Randbedingungen

(a) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

(b) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$,

(c) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 2$,

(d) $y(0) = 0$, $(y'(b))^2 = 1$, $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Eigenfunktionen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Randwertproblems

$$\begin{gathered}(xy'(x))' + \frac{\lambda}{x} y(x) = 0, \quad x \in (1, e)\\ y(1) = 0,\, y(e) = 0.\end{gathered}$$

Hierbei ist e die Eulersche Zahl.
Hinweis: Betrachten Sie die Substitution $x = e^t$, $t \in (0, 1)$.

Aufgabe 8.3. (10 Punkte) Geben Sie das Gleichungssystem, das bei der Diskretisierung des Randwertproblems

$$\begin{gathered}y''(x) - xy'(x) + 4y(x) = x, \quad x \in (0, 1)\\ y(0) = 1, y(1) = 0\end{gathered}$$

durch die Differenzenmethode entsteht, an. Benutzen Sie dafür eine äquidistante Diskretisierung von $[0, 1]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle. Approximieren Sie die Ableitungen durch die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}y'(x) &\approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h},\\ y''(x) &\approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2},\end{aligned}$$

wobei $h = \frac{1}{n}$ die Schrittweite ist. Lösen Sie das Gleichungssystem für den Fall $n = 5$ mit einer Genauigkeit von 3 Stellen. Fertigen Sie eine Skizze der Approximation an.