UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

1. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV A

im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 27. 4. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 1.1. (4 Punkte) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$x^\top Ax > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(b) Alle Diagonaleinträge von A sind positiv.

(c) A ist regulär.

(d) Eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn eine reguläre untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, für die $B = LL^\top$ gilt.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte) Für $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\|_2 = 1$ sei

$$Q = I_n - 2ee^\top \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Q ist symmetrisch, $Q^\top = Q$.

(b) Q ist orthogonal, $Q^\top Q = QQ^\top = I_n$.

(c) Q ist involturisch, $Q^2 = I_n$.

Bestimmen Sie, ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms, die Eigenwerte Q, sowie deren Vielfachheiten.
Anmerkung: Q beschreibt eine Spiegelung an der zu e orthogonalen Hyperebene.

Aufgabe 1.3. (8 Punkte) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 29 & 16 & 2 \\ 2 & 16 & 22 & 15 \\ 0 & 2 & 15 & 33 \end{pmatrix},$$

und lösen Sie damit das Gleichungssystem

$$Ax = b,$$

wobei

$$b = \begin{pmatrix} -4 \\ -30 \\ -5 \\ 67 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.4. (4 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung nach dem Householder-Verfahren das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$