



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

2. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV A im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 11. 5. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 2.1. (4 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe von Givens-Rotationen eine QR -Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (0, -\sqrt{2}, -3, -3)^\top$. Geben Sie alle Givens-Matrizen explizit an.

Aufgabe 2.2. (10 Punkte) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$, sowie $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b,$$

welche i. A. allerdings nicht existiert. Daher sucht man man $x^* \in \mathbb{R}^m$, welches das Fehlerquadrat

$$r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$$

minimiert.

(a) Zeigen Sie: r ist zweimal stetig differenzierbar mit Gradient

$$\nabla r(x) = 2A^\top(Ax - b)$$

und Hesse-Matrix $2A^\top A$.

(b) Zeigen Sie: Die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch und positiv definit.

(c) Zeigen Sie: Das Minimum der Funktion r erfüllt die sog. Normalengleichung

$$A^\top Ax^* = A^\top b.$$

- (d) Zeigen Sie: Ist $A = QR$ die QR -Zerlegung der Matrix A , so ist $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär.
- (e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der QR -Zerlegung von A und der Cholesky-Zerlegung von $A^T A$?
- (f) Zeigen Sie: Die Normalengleichung aus (c) lässt sich mit Hilfe der QR -Zerlegung von A umschreiben zu

$$Rx^* = Q^T b.$$

Welchen Vorteil hat die neue Formulierung in Hinblick auf eine numerische Umsetzung?

Aufgabe 2.3. (6 Punkte) Zu den Stützpunkten

x	y
0	0
1	1
2	2
3	0

soll dasjenige Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

bestimmt werden, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=0}^3 (p(x_i) - y_i)^2$$

minimiert.

- (a) Formulieren Sie das Problem im Sinne von Aufgabe 2.2.
- (b) Lösen Sie die Normalengleichung mit Hilfe der QR -Zerlegung.