



UNIVERSITÄT  
DES  
SAARLANDES

FR Mathematik  
Prof. Dr. S. Rjasanow  
T. Keßler, M. Sc.

### 3. Übung zur Vorlesung

# Höhere Mathematik für Ingenieure IV A

## im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 25. 5. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

**Aufgabe 3.1. (7 Punkte)** Für  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichne

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } M\}$$

den Spektralradius von  $M$ .

- (a) Zeigen Sie  $\rho(M) = \rho(M^\top)$ , sowie für eine reguläre Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dass  $\rho(SMS^{-1}) = \rho(M)$ .
- (b) Sei nun  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit von 0 verschiedenen Diagonaleinträgen. Zeigen Sie, dass die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens für das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

für alle rechten Seiten  $b \in \mathbb{R}^n$  und alle Startvektoren  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  die Konvergenz für das Gleichungssystem

$$A^\top x = b$$

für alle rechten Seiten  $b \in \mathbb{R}^n$  und alle Startvektoren  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  impliziert.

- (c) Führen Sie, ausgehend von  $x^0 = (0, 0, 0)^\top$ , drei Iterationen mit dem Jacobi-Verfahren für das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch.

**Aufgabe 3.2. (7 Punkte)** Charakterisieren Sie alle regulären Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit von 0 verschiedenen Diagonaleinträgen, bei denen für alle rechten Seiten  $b \in \mathbb{R}^n$  und

Startvektor  $x^0 = 0$  eine Iteration mit dem Gauß-Seidel-Verfahren die exakte Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  liefert.

**Aufgabe 3.3. (6 Punkte)** Wir betrachten für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und  $b \in \mathbb{R}^n$  das Einschrittverfahren

$$B \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, \dots$$

mit  $\tau > 0$  und einer regulären Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für das Gleichungssystem  $Ax = b$ .

- (a) Wir definieren den Fehler  $z^k$  der  $k$ -ten Iteration als  $z^k = x^k - x$ . Zeigen Sie die Gleichung

$$z^{k+1} = z^k - \tau B^{-1} A z^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

und folgern Sie

$$\|z^k\|_2 \leq \|C\|_2^k \|z^0\|_2,$$

wobei  $C = I - \tau B^{-1} A$  ist.

- (b) Schätzen Sie für das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 26 \end{pmatrix}$$

die Anzahl der benötigten Iterationen für das Gauß-Seidel-Verfahren mit Startvektor  $x^0 = (0, 0)^\top$  ab, um den Fehler  $\|z_0\|$  um sechs Größenordnungen zu verkleinern.