UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

## 3. Übung zur Vorlesung

# Höhere Mathematik für Ingenieure IV B

## im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 1. 6. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

**Aufgabe 3.1. (4 Punkte)** Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte

$$\mathrm{Re}(f(x+iy)) = x^2 + x^3 + ay^2 + bxy^2$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $a$ und $b$ so, dass $f$ holomorph ist. Geben Sie für diese Fälle den Imaginärteil von $f$ an.

**Aufgabe 3.2. (6 Punkte)** Es sei $G \subset \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ mit

$$f(re^{i\varphi}) = g(r, \varphi) + ih(r, \varphi).$$

Zeigen Sie, dass $f$ in $z = re^{i\varphi}$ genau dann holomorph ist, wenn die Differentialgleichungen

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial \varphi},$$
$$r\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{\partial g}{\partial \varphi},$$

erfüllt sind.

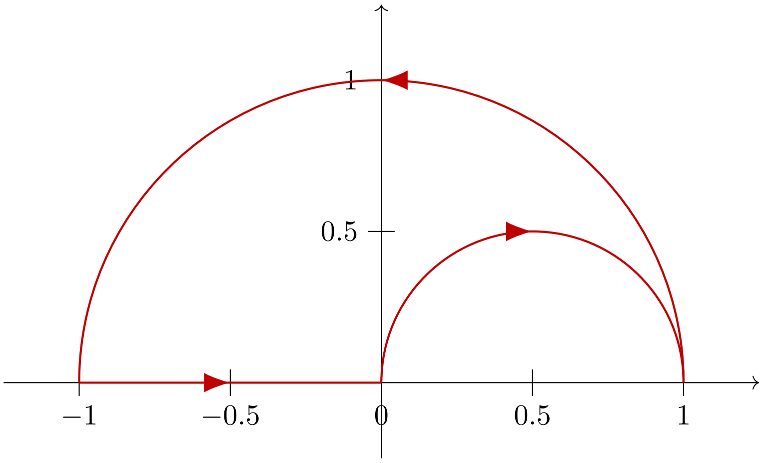
**Aufgabe 3.3. (4 Punkte)** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f$ auf $G$, die nur reelle Werte annimmt, konstant ist.

(b) Für welche holomorphe Funktionen $f$ auf $G$ ist $\overline{f}$, also $z \mapsto \overline{f(z)}$, ebenfalls holomorph? Begründen Sie.

**Aufgabe 3.4. (6 Punkte)**

(a) Parametrisieren Sie die in folgender Skizze dargestellte Kurve $\gamma$, beginnend bei $z = 0$.




(b) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \,\mathrm{d}z.$$

*Hinweis*: Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1 - \frac{1}{2}\cos(\pi t)}{\frac{5}{4} - \cos(\pi t)} \,\mathrm{d}t = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\sin(\pi t)}{\frac{5}{4} - \cos(\pi t)} \,\mathrm{d}t = \frac{\ln 3}{\pi}.$$