UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

4. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV A
im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 8. 6. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 4.1. (7 Punkte) Zu den $n+1$ Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ seien mit

$$\kappa_k = \prod_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_s}, \quad k = 0, \dots, n$$

die Stützkoeffizienten bezeichnet. Zeigen Sie für äquidistante Stützstellen $x_k = x_{k-1} + h$, $k = 1, \dots, n$, dass

(a)
$$\kappa_k = (-1)^{n-k} \frac{h^{-n}}{n!} \binom{n}{k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

(b)
$$\kappa_0 = (-1)^n \frac{h^{-n}}{n!}, \quad \kappa_k = -\kappa_{k-1} \frac{n-k+1}{k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

(c)
$$\sum_{k=0}^{n} \kappa_k = 0.$$

Aufgabe 4.2. (7 Punkte) Für $n+1$ Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ mit Werten $f_0, \dots, f_n$ seien κ_k, $k = 0, \dots, n$, definiert wie in Aufgabe 4.1.

(a) Zeigen Sie für das Lagrange-Polynom L_k für $x \neq x_k$ die Darstellung

$$L_k(x) = \frac{\kappa_k}{x - x_k} \ell(x),$$

mit

$$\ell(x) = \prod_{s=0}^{n} (x - x_s).$$

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

und folgern Sie

$$\ell(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\kappa_k}{x - x_k}}.$$

(c) Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom $\mathcal{I}[f]$ durch die Wertepaare (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$, sich schreiben lässt zu

$$\mathcal{I}[f](x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\kappa_k}{x - x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\kappa_k}{x - x_k}}, \quad x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$$

und folgern Sie

$$\mathcal{I}[f](x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f_k}{x - x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x - x_k}}, \quad x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$$

für äquidistante Stützstellen.

(d) Welche Vorteile hat die Form aus Teil (c) für die Auswertung des Interpolationspolynoms gegenüber der Darstellung

$$\mathcal{I}[f] = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k?$$

Aufgabe 4.3. (6 Punkte) Bestimmen Sie zur folgenden Tabelle

x	0	1	2	3
y	1	3	2	4

das Interpolationspolynom samt aller Zwischenschritte

(a) mit expliziter Berechnung der Lagrange-Polynome,

(b) mit der Formel aus Aufgabe 4.2.