UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

5. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV A

im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 22. 6. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 5.1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Quadraturformel mit n Auswertungen auf einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}[f] = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

höchstens Polynome bis einschließlich Grad $2n - 1$ exakt integrieren kann.

Aufgabe 5.2. (6 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sollen Gewichte $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ und eine Zwischenstelle $z \in [a, b]$ so bestimmt werden, dass die Quadraturformel

$$\mathcal{Q}[f] = w_1 f(a) + w_2 f(z)$$

alle Polynome bis einschließlich Grad zwei exakt integriert. Werden von der Quadratur auch Polynome höheren Grades exakt integriert? Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil im Vergleich zur Trapezregel.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte) Die einzige Nullstelle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^5 - 3x + 4$$

soll mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden.

(a) Berechnen Sie, ausgehend von $x_0 = 0$ die ersten zehn Iterierten. Was beobachten Sie? Wie lässt sich das Verhalten erklären?

(b) Wiederholen Sie den ersten Aufgabenteil für $x_0 = -1$.

Aufgabe 5.4. (6 Punkte) Die Funktion

$$g : [0{,}7; 0{,}9] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{2} \log(1 - x)$$

besitzt einen Fixpunkt.

(a) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 0{,}82$ die ersten drei Folgeglieder der Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Was stellen Sie fest? Wieso ergibt sich kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

(b) Zeigen Sie, dass das Fixpunktproblem der Funktion g äquivalent zum Fixpunktproblem der Funktion

$$f : [0{,}7; 0{,}9] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - \exp(-2x)$$

ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

für jede Wahl von $x_0 \in [0{,}7; 0{,}9]$ konvergiert.