



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

5. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV B im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 29. 6. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 5.1. (4 Punkte) Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z(z-i)^2}$$

um $z_0 = 0$ in Laurentreihen für die Gebiete $0 < |z| < 1$ und $1 < |z| < \infty$.

Aufgabe 5.2. (6 Punkte) Bestimmen Sie die Art der Singulärität der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z^2 + 1) \cos \frac{1}{z-1}$$

und entwickeln Sie f in eine Laurentreihe um die Singularität. Geben Sie geschlossene Ausdrücke für die Koeffizienten an.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte) Warum widerspricht folgende Rechnung nicht der Eindeutigkeit der Laurententwicklung?

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4. (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $J_n(t)$ der n -te Koeffizient der Laurentreihe um $z_0 = 0$ von

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(\frac{t}{2}(z - z^{-1})\right).$$

(a) Zeigen Sie

$$J_n(-t) = (-1)^n J_n(t) = J_{-n}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \varphi - n\varphi) \, d\varphi$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.