UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

6. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV A

im Sommersemester 2018

Abgabe: Freitag, den 6. 7. 2018 bis spätestens 12:15 Uhr.

Aufgabe 6.1. (4 Punkte) Zeigen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass die Funktionen

$$G_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln\|x\|_2$$

und

$$G_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x\|_2}$$

harmonisch sind.

Aufgabe 6.2. (6 Punkte) Zeigen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass die Funktion $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)\right] + \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(z) \,\mathrm{d}z, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Löung der Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung. Drücken Sie diese durch die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

aus.

(b) Berechnen Sie $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x).$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 6.4. (6 Punkte) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung durch den Ansatz $u(t, x) = v(x/\sqrt{t})$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(z) + \frac{z}{2} v'(z) = 0,$$

mit $z = x/\sqrt{t}$, transformiert.

(b) Zeigen Sie, dass die allgmeine Lösung der Differentialgleichung die Form

$$v(z) = c \int_0^z e^{-\frac{s^2}{4}} \, \mathrm{d}s + d$$

mit Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ hat.

(c) Bestimmen Sie die Anfangsbedingung von u, d.h.

$$u(0, x) = \lim_{t \downarrow 0} u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) Bilden Sie u_x und bestimmen Sie aus der Forderung, dass der Sprung in der Anfangsbedinung

$$\lim_{x \downarrow 0} u(0, x) - \lim_{x \uparrow 0} u(0, x)$$

die Höhe 1 hat, die Konstante c. Welche Funktion erhalten Sie?

Hinweis: $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\alpha}$, $\alpha > 0$.