Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

11. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure I
im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 02.02.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 11.1. (1.5 + 1 + 2 + 1.5 = 6 Punkte)
Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!}.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x)$.

(b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe $f(z)$ an ("geschlossen" bedeutet hier einen Ausdruck "ohne Reihe"), indem Sie $f(z)$ mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion vergleichen.

(c) Bestimmen Sie die erste und zweite Partialsumme $S_1(z)$ und $S_2(z)$ der Potenzreihe $f(z)$.

(d) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto S_1(x)$ und $x \mapsto S_2(x)$ im Intervall $x \in [-1, 4]$ in dasselbe Koordinatensystem.

Aufgabe 11.2. (2 + 4 = 6 Punkte)
Die Potenzreihe $P(x)$ sei durch

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n+1} x^n$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass für diese x aus a) die folgende Gleichung gilt:

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n+1} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x)$$

Hinweis: Schreiben Sie die Reihe so um, dass sie von $n = 1$ startet und bestimmen Sie dann die Potenzreihenentwicklung von $\left[\frac{1}{1-x}\right]'$ und $[\ln(1-x)]'$.

Aufgabe 11.3. (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Zeigen Sie die Identitäten mit Hilfe der Ihnen aus der Vorlesung bekannten Theoreme.

(a) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Hinweise:

- Ersetzen Sie x durch $x = \sinh(X)$ für ein eindeutig bestimmtes X und machen Sie diese dann zum Schluss wieder rückgängig.
- $\ln(e^X) = \ln\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\right)$