



## 12. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 09.02.2017 vor der Vorlesung.

### Aufgabe 12.1. (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x + 3$$

im Punkt  $x_0 = 2$  nach der Taylorschen Formel.

- (b) Geben Sie die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades und die zugehörigen Restglieder in Lagrangescher Form an.  
Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylorpolynome ersten und zweiten Grades Näherungswerte für die in der Nähe von  $x_0 = 2$  liegende Nullstelle von  $f(x)$ .

### Aufgabe 12.2. (2 + 2 = 4 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie  $f(x) = \cos(x)$  an der Stelle  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied.
- (b) Schätzen Sie ab, für welche  $x$  der Fehler bei der Berechnung von  $\cos(x)$  durch diese nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung nicht größer als  $10^{-3}$  ist.  
*Hinweis:* Verwenden Sie die Lagrangesche Restformel.

### Aufgabe 12.3. (5 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y'' + 3xy' + 3y = 0.$$

Leiten Sie eine Lösung der Differentialgleichung um den Punkt  $x_0 = 0$  mit Hilfe des Potenzreihenansatzes  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  her.

### Aufgabe 12.4. (1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x \cdot \ln(x).$$

- (a) Entwickeln Sie  $f$  um 1 in das 2. Taylor-Polynom  $T_2(x)$ .
- (b) Schätzen Sie den Approximationsfehler  $|f(x) - T_2(x)|$  auf dem Intervall  $[1, 2]$  nach oben ab.
- (c) Wie muss  $a$  gewählt werden, um im Intervall  $[1, a]$  die Abschätzung  $|f(x) - T_2(x)| \leq 10^{-2}$  zu garantieren?